30 Novembre

"o" piccolo.

Date $f, g : I \to \mathbb{R}$ e dato un $\bar{x} \in I'$ (possibilmente anche $\bar{x} = \pm\infty$) con $g(x) \neq 0 \;\; \forall x \in I$

scriviamo che $f = o(g)$ se $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Più discorsivamente, scriviamo che f va a 0 più rapidamente di g per $x \to \bar{x}$ se $f = o(g)$

Esempio 1) Se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{1} = 0$ scriviamo $f(x) = o(1)$

2) Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, allora possiamo scrivere che

$$f(x) = 1 + o(1)$$

3) $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1$

$$1 - \operatorname{th}(x) = 1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(\cancel{e^x} + e^{-x}) - (\cancel{e^x} - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$= 2e^{-x} \frac{1}{e^x(1 + e^{-2x})} = 2e^{-2x} \frac{1}{1 + e^{-2x}}$$

$\lim_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0 \implies e^{-2x} = o(1)$

$$= 2e^{-2x} \frac{1}{1 + o(1)} = 2e^{-2x}(1 + o(1))$$

$$1 - \operatorname{th} x = 2e^{-2x}(1 + o(1))$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \operatorname{th} x}{2e^{-2x}} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \operatorname{th} x}{x^{-10}} = 0$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{1 - \operatorname{th} x}{2e^{-2x}}}_{\to 1} \frac{2e^{-2x}}{x^{-10}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2 \frac{x^{10}}{e^{2x}} = 0$$

$$1 - \operatorname{th} x = o(x^{-10})$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$1 - \cos(x) = o(x)$$

$\bar{x} = 0$

$o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$

$o(x^3) = x^3 o(1)$

supponiamo che $f = o(x^3)$, allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 0 \iff \frac{f(x)}{x^3} = o(1) \iff f(x) = o(1)x^3$$

$o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$

Qui dimostro che se $f(x) = o(x^2) + o(x^3)$ allora $f(x) = o(x^2)$.

Verificare che $f(x) = o(x^2)$ significa verificare che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x^2) + o(x^3)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{o(x^2)}{x^2} + \frac{o(x^3)}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^2} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} x = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{o(x^3)}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{o(x^3)}{x^3} x$$

Teor (Peano) Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$, supponiamo che le derivate fino all'ordine n di f in x_0 siano definite e consideriamo la formula

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \qquad \text{dove}$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Allora $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ in x_0

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Lemma Sia $p(x)$ un polinomio di grado $\leq n$ e $x_0 \in \mathbb{R}$

Se $p(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ allora $p(x) \equiv 0$.

Dimostriamolo nel caso particolare $x_0 = 0$

Supponiamo di avere $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

con $p(x) = o(x^n)$. Verifichiamo che allora $a_n = a_{n-1} = \dots = a_0 = 0$ (1)

Supponiamo per assurdo che (1) non sia vera, allora

Allora sia $k_0 \in \{0, \dots, n\}$ l'indice minimo t.c. $a_{k_0} \neq 0$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_{k_0+1} x^{k_0+1} + a_{k_0} x^{k_0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{x^{k_0}} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{a_n x^n + \dots + a_{k_0+1} x^{k_0+1}}^{o(x^{k_0})} + a_{k_0} x^{k_0}}{x^{k_0}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{o(x^{k_0}) + a_{k_0} x^{k_0}}{x^{k_0}} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{o(x^{k_0})}{x^{k_0}} + \frac{a_{k_0} \cancel{x^{k_0}}}{\cancel{x^{k_0}}} \right]$$

$\frac{o(x^{k_0})}{x^{k_0}} \to 0$

$= a_{k_0} \neq 0$. Se $k_0 = n$ abbiamo un assurdo, perché

per ipotesi $p(x) = o(x^n)$. Se $0 \leq k_0 < n$

Per ipotesi $\lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{x^n} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{x^{k_0}} = \lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{x^{k_0}} \frac{x^{n-k_0}}{x^{n-k_0}}$ ($n-k_0 > 0$)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{x^n} x^{n-k_0} = 0$$

$\frac{p(x)}{x^n} \to 0$, $x^{n-k_0} \to 0$

in contraddizione col fatto, visto sopra che $\lim_{x\to 0} \frac{p(x)}{x^{k_0}} = a_{k_0} \neq 0$.

Conclusione è che $a_n = a_{n-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$

__Lemma__ Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ e sia $P_n(x)$

$$\boxed{P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.}$$

supponiamo che $q(x)$ sia un polinomio di grado $\leq n$

e t.c. $\quad f(x)=q(x)+o((x-x_0)^n)$

Allora $\quad \boxed{q(x)=P_n(x)}$

__Dim__ Per Peano $\quad f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$

Per ipotesi $\quad f(x)=q(x)+o((x-x_0)^n)$

$$0=P_n(x)-q(x)+\underbrace{o((x-x_0)^n)-o((x-x_0)^n)}_{o((x-x_0)^n)}$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o((x-x_0)^n)-o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\left[\underbrace{\frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{o((x-x_0)^n)}{(x-x_0)^n}}_{\to 0}\right]$$

$$=0$$

$$\Rightarrow\ o((x-x_0)^n)-o((x-x_0)^n)=o((x-x_0)^n)$$

$$q(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)$$

polinomio di grado $\leq n$. Dal precedente Lemma

segue $\quad q(x)-P_n(x)\equiv 0$.

$f(x) = x^3 \sin(x^2)$. Calcolare tutti i polinomi di McLaurin.

$$\sin(\cancel{y}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cancel{y}^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(\cancel{y}^{2n+1})$$

$y = x^2$

$$\sin(x^2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{4k+2}}{(2k+1)!} + o(x^{4n+2})$$

$$x^3 \sin(x^2) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{4k+5}}{(2k+1)!}}_{P_{4n+5}(x)} + o(x^{4n+5})$$

Ho ottenuto tutti i polinomi della forma

P_{4n+5} $\quad n = 0, 1, \ldots$

$n=0 \quad P_5(x) = x^5$ $\qquad P_6, P_7, P_8$?

$n=1 \quad P_9(x) = x^5 - \frac{x^9}{3!}$ $\qquad P_6 = P_7 = P_8 = P_5$

$n \quad P_{4n+5} = P_{4n+6} = P_{4n+7} = P_{4n+8}$

$n+1 \quad P_{4n+9}$

$P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0$

$x^3 \sin(x^2) = x^5 + o(x^5) = o(x^4) \Longrightarrow P_4 = 0 = P_3 = P_2 = P_1 = P_0$

Calcolare tutte le derivate $f^{(k)}(0)$.

$o(x^5) = x^5 o(1) = x \; x^4 o(1) = x \; o(x^4) = o(x^4)$

$$f(x) = x^3 \sin(x^2)$$

$$f(x) = P_{4n+5}(x) + o(x^{4n+5})$$

$$P_{4n+5}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{4k+5}}{(2k+1)!}$$

Calcolare $f^{(\ell)}(0)$

$$P_{4n+5}(x) = \sum_{\ell=0}^{4n+5} \frac{f^{(\ell)}(0)}{\ell!} x^{\ell}$$

Ricaveremo $f^{(\ell)}(0)$ per ogni ℓ, confrontando i polinomi.

Se $\ell \neq 4k+5$ per $k \in \{0, \dots, n\}$ allora
allora $f^{(\ell)}(0) = 0$

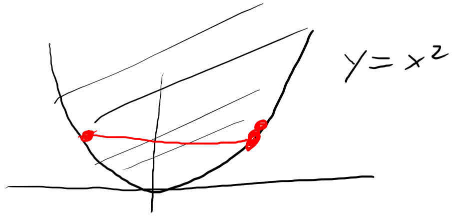
Se invece $\ell = 4k+5$ per un $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\frac{f^{(\ell)}(0)}{\ell!} \cancel{x^{\ell}} = (-1)^k \frac{\cancel{x^{4k+5}}}{(2k+1)!}$$

$$\frac{f^{(4k+5)}(0)}{(4k+5)!} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \iff f^{(4k+5)}(0) = (-1)^k \frac{(4k+5)!}{(2k+1)!}$$

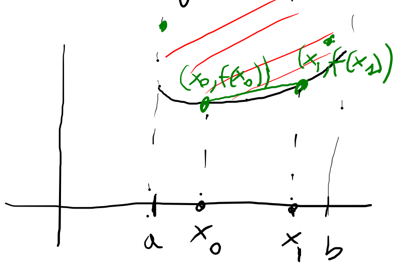
Funzioni convesse

Esempi $f(x)=x^2$



perché la regione che sta sopra il grafico è convessa,
cioè presi due qualsiasi punti di questa regione, il segmento di estremi questi due punti è contenuto in questa regione

Def 1 Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ si dice convessa se la regione sopra il suo grafico, nel piano, è convessa



$\{(x,y): a \le x \le b, \; y \ge f(x)\}$

Def 2 $f: I \to \mathbb{R}$ è convessa se $\forall\, x_0, x_1 \in I$

si ha $f((1-t)x_0 + t x_1) \le (1-t) f(x_0) + t f(x_1) \quad \forall\, t \in [0,1]$

Notare che il segmento di estremi i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$,
in forma parametrica può essere rappresentato

$$\big((1-t)x_0 + t x_1 ,\ (1-t) f(x_0) + t f(x_1) \big) \qquad t \in [0,1]$$

Il segmento sta nella regione sopra il grafico se

$$(1-t) f(x_0) + t f(x_1) \ge f\big((1-t)x_0 + t x_1\big)$$

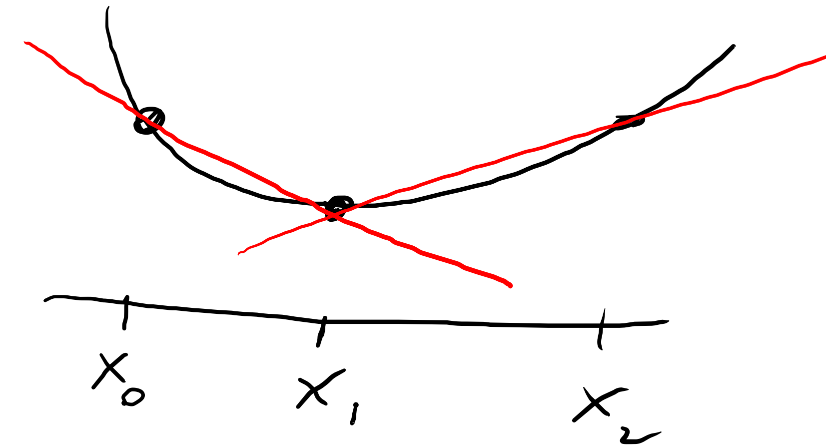
Ci sono altre definizioni equivalenti di funzione convessa

Def 3 f è convessa se

$\forall$ terna $x_0 < x_1 < x_2$ in I

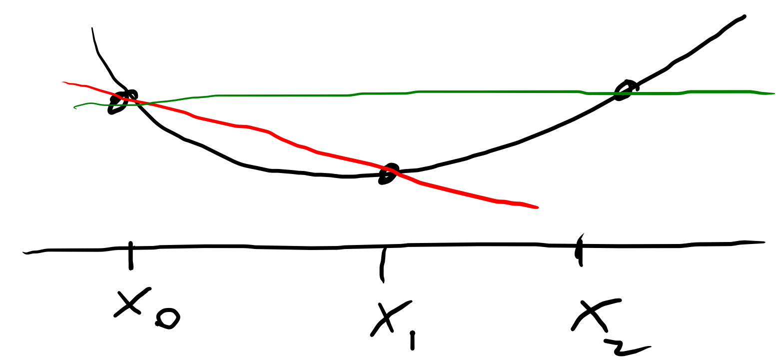
si ha

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$



Def 4 f convessa se $\forall$ terna $x_0 < x_1 < x_2$

si ha $$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

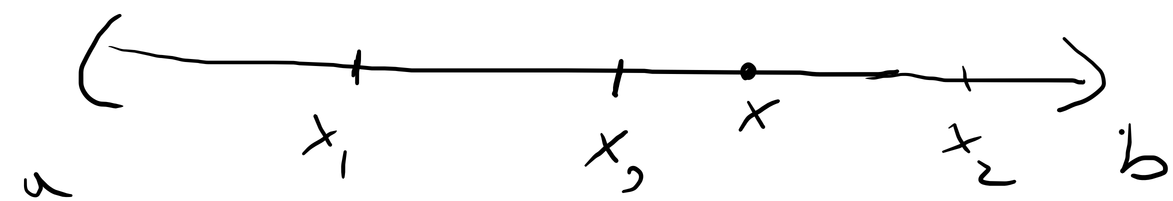


Def 5 $\forall$ $x_0 \in I$ la funzione definita su $I \setminus \{x_0\}$

$$x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$ è crescente

Lemma Sia f convessa in (a,b) allora in ogni $x_0 \in (a,b)$ esistono $f'_d(x_0)$ e $f'_s(x_0)$ e $f'_s(x_0) \leq f'_d(x_0)$

Dim Preso x_0



e presi $x_1 < x_0 < x_2$,

se ~~il lim~~ limite esiste ed è finito

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \inf \left\{ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} : x > x_0 \right\} > -\infty$$

perché $\forall\, x > x_0$, ho $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

Quindi $f'_d(x_0)$ esiste e $f'_d(x_0) \geq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall\, x < x_0$

$$f'_s(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'_d(x_0)$$