26/10/2021

Recap

I parte: dimostrazione del thm di DVX

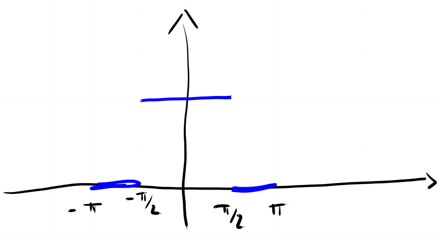
Thm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-per e loc int e supponiamo $\exists$ finiti i limiti

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = f(x_0^\pm) \quad , \quad \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0^\pm)}{x - x_0} = f'(x_0^\pm)$$

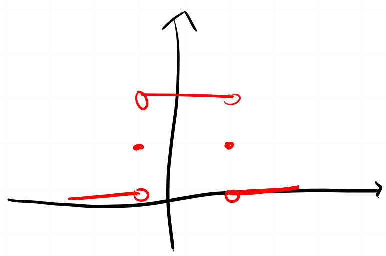
allora

$$S_N(x_0) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{in\omega x_0} \xrightarrow{N \to \infty} \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-) \right)$$

Esempio



$\rightsquigarrow$



Parte II

Problema di Basilea: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Principio d'identità per le serie di Fourier

Siano f e $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, T-periodiche, localmente integrabili dotate $\forall x \in \mathbb{R}$ di derivate finite e supponiamo che

$$c_n(f) = c_n(g) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

allora $f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Dim Se f e g sono derivabili $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ f e g sono continue $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ $\exists$ limiti dx e sx di f e g in x e del loro rapporto incrementale

$\Longrightarrow$ Le condizioni del thm di DIN sono soddisfatte

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{in\omega x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\, e^{in\omega x}$$

Per ipotesi tuttavia $c_n(f) = c_n(g)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{\boxed{f(x) \overset{DIN}{=\!=}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\, e^{in\omega x} \boxed{\overset{DIN}{=\!=} g(x)}}$$

$\rightsquigarrow$ la tesi del teorema $\#$

Ricordiamo il Lemma di RL

Lemma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-per, loc. int.

$$\lim_{n \to \pm\infty} c_n(f) = 0$$

Relazioni tra i coefficienti di Fourier di una funzione e quelli delle sue derivate

Teorema Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-per e loc. int, derivabile k volte, con $k \in \mathbb{N}^*$ e sia $f^{(k)}$ loc int allora $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f)$$

Dim se $k = 0$ il claim è banale

$k=1$

$$c_n(f') = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(x)\, e^{-in\omega x}\, dx = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \partial_x f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

$(uv)' = u'v + uv'$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left[\partial_x\left(f(x)\, e^{-in\omega x}\right) - f(x)\, \partial_x\left(e^{-in\omega x}\right)\right] dx$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$= \cancel{\frac{1}{T}\left[f(x)\, e^{-in\omega x}\right]_{-T/2}^{T/2}}^{=0} - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\,(-in\omega)\, dx$$

$$= (in\omega)\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx}_{= c_n(f)}$$

$$= in\omega\, c_n(f)$$

Per i successivi k si procede induttivamente #

Relazione tra regolarità di una funzione e velocità di decadimento dei coefficienti di Fourier

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, T-periodica $f\in C^k(\mathbb{R})$ (f è derivabile k volte e $f^{(k)}$ è continua), $f^{(k)}$ è loc int. dal lemma di RL ne segue che

$$c_n(f^{(k)}) \xrightarrow{n\to\pm\infty} 0$$

Per il teorema precedente otteniamo la relazione

$$c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f)$$

$$\leadsto \quad |c_n(f)| \le \frac{1}{|n\omega|^k}\,|c_n(f^{(k)})|$$

tuttavia siccome $c_n(f^{(k)}) \xrightarrow{n\to\pm\infty} 0$ ne deduciamo che $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ tc $|c_n(f^{(k)})|\le 1/2$ il quale dunque implica che

$$|c_n(f)| \le \frac{1}{2}\,\frac{1}{|\omega|^k}\cdot |n|^{-k} = \frac{T^k}{2\cdot(2\pi)^k}\,|n|^{-k}$$

Questo mi dice che, utilizzando la notazione o

$$|c_n(f)| = o(|n|^{-k})$$

NB $f=o(g)$ quando $t\to\pm\infty$ sse

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t)/g(t) = 0$$

$$f\in C^k(\mathbb{R}) \Longrightarrow |c_n(f)| = o(|n|^{-k})$$

ANALISI

Q: Possiamo dedurre informazioni riguardanti la regolarità della funzione f analizzando il decadimento dei modi di Fourier ad infinito?

Lemma Consideriamo la serie trigonometrica

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\omega x}$$

che converge puntualmente a f in $\mathbb{R}$ e supponiamo esista $p > k+1$ tc

$$|\gamma_n| = O\left(\left(\frac{1}{|n|}\right)^p\right) = O\left(|n|^{-p}\right),$$

allora $f \in C^k(\mathbb{R})$.

Dim Proviamo il risultato per $k=1$. In questo caso le ipotesi ci dicono che $p > 2$, poiché

$$|\gamma_n| = O(|n|^{-p}) \quad \text{e} \quad |in\omega\gamma_n| = O(|n|^{1-p}),$$

con $p-1 > 1$, le serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n| \quad \text{e} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |in\omega\gamma_n| \quad \text{convergono}$$

utilizzando l'M-test di Weierstrass deduciamo che

Una serie $\sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{in\omega x}$ tc $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{in\omega x}$

converge uniformemente in $\mathbb{R}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\omega x} \quad \text{conv unif a} \quad f(x)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\omega\gamma_n e^{in\omega x} \quad \text{---}\,''\,\text{---} \quad g(x)$$

Per il teorema di derivazione termine a termine f è derivabile e $f' = g$ con g continua. Quindi f è di classe C^1

Il risultato per k generico si può quindi dedurre per induzione #

Domanda Supponiamo che $p = k+1$, tale ipotesi è sufficiente a verificare il risultato di cui sopra?

Risposta: No

Esempio $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$ estesa per 2π-periodicità.

Foglio 1 es 9.2 sappiamo che

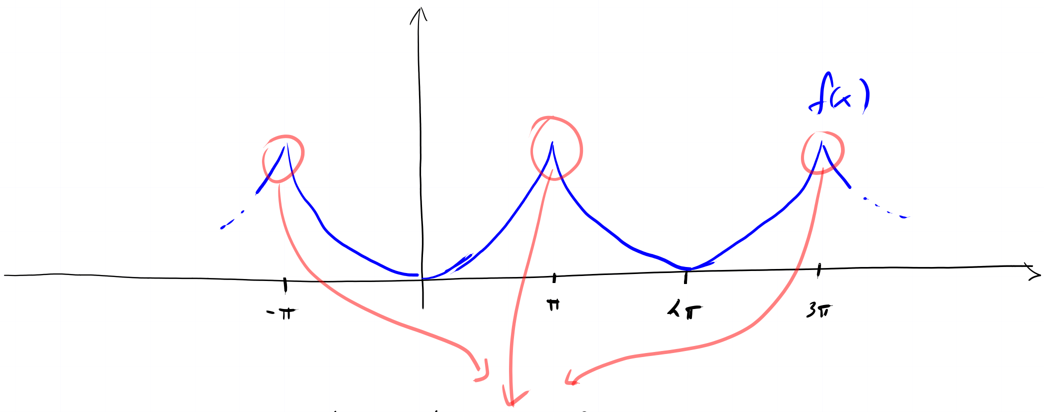
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \boxed{\cos(nx)} \quad \text{in } \mathbb{R}$$

$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$

$$c_{\pm n}(f) = \underline{\frac{2}{n^2}}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$\hookrightarrow$ è esattamente il caso limite $p = k+1$ dove $k = 1$

tuttavia la funzione $f(x) = x^2$ estesa 2π-periodicamente non è C^1



In questi punti la funzione è sì continua, ma non è derivabile (punti di cuspide)

Esempio 2 Consideriamo la serie

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sin(nx)$$

è differenziabile? Che regolarità ha? Sappiamo calcolare f(x)?

Domanda 1 La serie trigonometrica (*) converge a qualche elemento limite? Se sì, in che topologia?

Risposta 1 Sì la serie è convergente.

$$\frac{1}{n!} = o(2^{-n})$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ è una serie geometrica, che converge e della quale sappiamo calcolare la somma.
Siccome la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ è a termini positivi possiamo comparare i termini generici e dedurre che anch'essa è convergente

⟿ Utilizzo l'M-test di Weierstrass per dedurre che la serie

$\sum_n \frac{\sin(nx)}{n!}$ conv unif in $\mathbb{R}$.

Deriviamo la serie ed otteniamo la serie

$$\sum_n \frac{n\cos(nx)}{n!}, \qquad \text{con coefficiente generico } \frac{n}{n!}$$

Q $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$ converge?

$$\frac{n}{n!} \leq \frac{n}{2^n} \rightsquigarrow \text{converge}$$

$\Longrightarrow$ la serie è C^1.

Per casa provare che la serie è C^k $\forall k \in \mathbb{N}$.