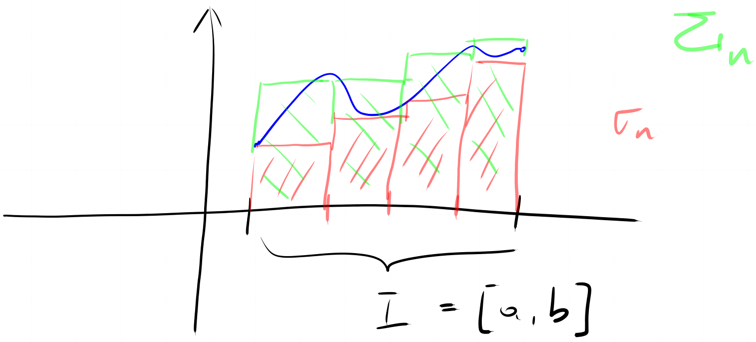
Teoria dell'integrazione secondo Lebesgue

Motivazione: colmare alcune debolezze della teoria di integrazione secondo Riemann.

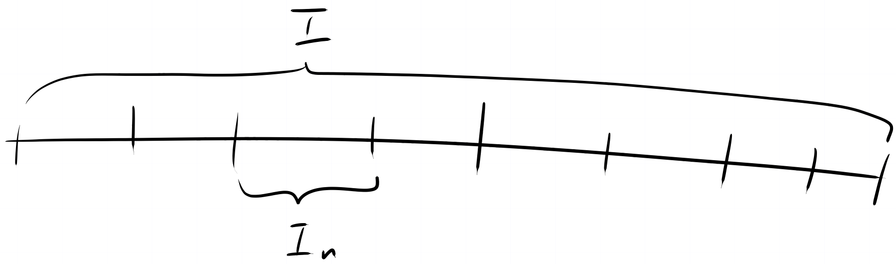
Recap (brevissimo) della teoria di Riemann

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Consideriamo una partizione di I

$$I = \bigsqcup_{n=1}^{N} I_n \qquad I_n = \left[a + \frac{b-a}{N}(n-1),\ a + \frac{b-a}{N} n \right]$$



E consideriamo ora le somme parziali inferiori e superiori definite come

$$\Sigma_n = \sum_{n=1}^{N} |I_n| \sup_{x \in I_n} f(x)$$

$$\sigma_n = \sum_{n=1}^{N} |I_n| \inf_{x \in I_n} f(x)$$

Se $\exists$ finito il limite

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} \Sigma_n = \mathcal{S}$$

allora f è R-integrabile in $I = [a, b]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{S}$

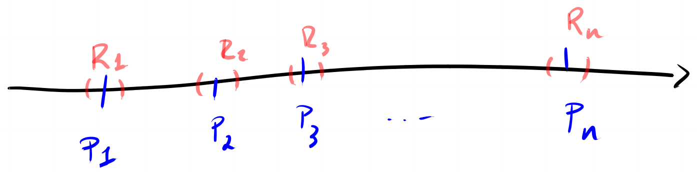
Insieme di misura nulla secondo Peano - Jordan

Si dice che un insieme $T \subseteq \mathbb{R}^N$ ha PJ-misura nulla se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ rettangoli $R_1, \dots, R_n$ tali che

$$T \subseteq R_1 \cup \dots \cup R_n \quad e \quad m(R_1) + \dots + m(R_n) < \varepsilon$$

Oss: n può dipendere da ε ma è sempre una quantità finita

Esempio



$$R_k = \left[P_k - \frac{\varepsilon}{2n}, P_k + \frac{\varepsilon}{2n}\right]$$

$$m(R_1) + \dots + m(R_n) = \underbrace{\varepsilon/n + \dots + \varepsilon/n}_{\times n} = \varepsilon$$

Insieme di misura nulla secondo Lebesgue

Si dice che $T \subseteq \mathbb{R}^N$ ha L-misura nulla se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una successione di rettangoli $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ t.c.

$$T \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} R_j \quad e \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} m(R_j) < \varepsilon$$

e scriveremo $m(T) = m^L(T) = 0$

Esempio: Consideriamo l'insieme $\mathbb{Q} \cap [0,1] = Q$

Considerazioni:

- L'insieme $\mathbb{Q}$ è numerabile

$\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$	1	2	3	4 ...
1	$1/1$	$2/1$	$3/1$	$4/1$
2	$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$
3	$1/3$	$2/3$	$3/3$	$3/4$
4				

Diagonalizzazione di Cantor

- L'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile

Dim Supponiamo che $[0,1]$ sia numerabile dunque posso scrivere $[0,1]$ come biiezione con $\mathbb{N}$

$$0,a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ \cdots$$
$$0,a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ \cdots$$
$$\vdots$$
$$0,a_{n1}\ a_{n2}\ \cdots,\ a_{nn},\ \cdots$$

$$0,b_1\ b_2\ b_3, \text{---} \qquad b_n \neq a_{nn}$$

In questo modo identifichiamo un numero che appartiene all'insieme $[0,1]$ ma è diverso da ogni elemento della successione numerica

$\lightning$

Riprendiamo l'esempio $Q = \mathbb{Q} \cap [0,1]$

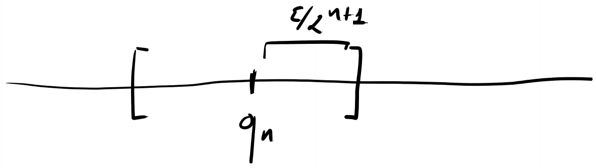
<u>CLAIM</u>: Q ha misura di Lebesgue nulla

Q è un sottoinsieme dei numeri razionali

$\Rightarrow Q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Posso dunque definire il rettangolo (chiuso) R_n centrato in q_n

$$R_n = \left[q_j - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right]$$



Abbiamo dunque che

$$m^L(R_n) = \varepsilon/2^n$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} m^L(R_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon/2^n = 2\varepsilon$$

$\#$

Proprietà verificate quasi ovunque (q.o.)

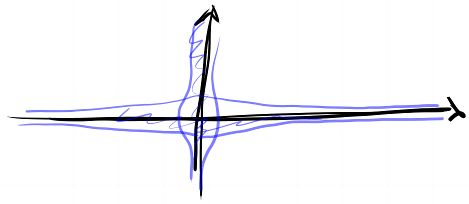
Si dice che una proprietà (o predicato) $p(x)$ definito $\forall x \in E \subseteq \mathbb{R}^N$ è verificata q.o. in E se $p(x)$ è verificata $\forall x \in T \subseteq E$ e t.c.

$$m(E \setminus T) = 0$$

Esempio · Proprietà: x è irrazionale in $[0,1]$.

· $p(x) =$ " $\lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} = 0$ " $x \in E = \mathbb{R}$. p è vera q.o.

· $p(x,y) =$ " $xy = 0$ " $(x,y) \in E = \mathbb{R}^2$ p è falsa q.o. in $\mathbb{R}^2$



Convergenza puntuale q.o.

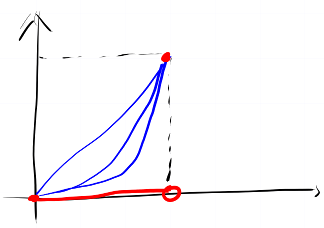
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni con $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ e sia $f : E \to \mathbb{C}$ si dice che $(f_n)_n$ converge q.o. a f in E se

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \qquad \text{q.o. in } E$$

Esempi · $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $f(x) = 0$ $\qquad E = \mathbb{R}$

· $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$ $\qquad E = [0,1]$

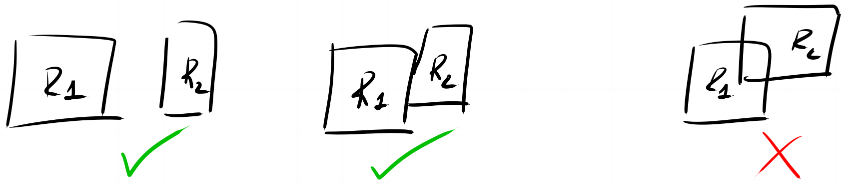
$f_n(1) \equiv 1$ $\forall n$ dunque $f_n(1) \not\to f(1)$ tuttavia $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [0,1)$



Funzioni a Scala

Una funzione $s : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ si dice *funzione a scala* se esistono k rettangoli $R_1, \dots, R_k$ con $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$ se $i \neq j$ e k numeri complessi $c_1, \dots, c_k$ t.c.

$$s(x) = c_1 \chi_{R_1}(x) + c_2 \chi_{R_2}(x) + \dots + c_k \chi_{R_k}(x) .$$



Oss Una funzione a scala è integrabile secondo Riemann e si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} s = \sum_{j=1}^{k} c_j \, m(R_j)$$

Funzione integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, si dice che f è *integrabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$* se $\exists$ una successione di funzioni a scala $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.c.

1) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} S_n(x) = f(x)$ L-q.o. in $\mathbb{R}^N$

2) $\displaystyle \lim_{n,m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |S_n - S_m| = 0$

(Condizione di Cauchy integrale)

In tal caso si pone

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} S_n \qquad (L)$$

Oss Una prima obiezione che può essere fatta è la seguente:

come possiamo essere sicuri che $\exists \displaystyle \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} S_n$?

Consideriamo la serie di valori complessi

$$J_n = \int_{\mathbb{R}^N} S_n \in \mathbb{C}$$

Calcoliamo ora $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$|J_n - J_m| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} s_n - \int_{\mathbb{R}^n} s_m \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (s_n - s_m) \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |s_n - s_m| \xrightarrow[\text{per la condizione 2)}]{n,m \to \infty} 0$$

$\rightsquigarrow$ Abbiamo dunque provato che la successione $(J_n)_n$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$.

Sappiamo tuttavia che $\mathbb{C}$ è completo, quindi

$$\exists \lim_n J_n = \lim_n \int_{\mathbb{R}^N} s_n$$

Funzioni misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Una funzione $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ si dice misurabile in $\mathbb{R}^N$ se $\exists$ una successione di funzioni a scala $(s_n)_n$ t.c.

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x) \qquad L\text{-q.o. in } \mathbb{R}^N$$

Insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^N$

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile secondo Lebesgue se la funzione χ_E è L-integrabile. In tal caso definiamo

$$m^L(E) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_E$$

Funzioni integrabili su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ con E L-misurabile. Si dice che f è integrabile in E se, data la funzione

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus E \end{cases}$$

allora f_0 è L-integrabile in $\mathbb{R}^N$.

Funzioni misurabili secondo Lebesgue su insiemi misurabili

Sia $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ con E L-misurabile si dice che f è misurabile secondo Lebesgue in E se la funzione f_0 definita sopra è L-misurabile in $\mathbb{R}^N$.

Tutti i concetti introdotti nelle pagine precedenti sono propedeutici al seguente teorema, che è il teorema fondamentale della teoria di integrazione secondo Lebesgue

Teorema [di convergenza dominata secondo Lebesgue]

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme L-misurabile in $\mathbb{R}^N$ e sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni, con $f_n : E \to \mathbb{C}$ misurabile $\forall n$, convergente q.o. in E a una funzione $f : E \to \mathbb{C}$.

Se $\exists$ una funzione $g : E \to \mathbb{R}_+$ integrabile e tale che $\forall n$

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{q.o. in } E$$

allora f_n è integrabile $\forall n$, e pure il limite puntuale q.o. f è integrabile e si ha che

$$\lim_n \int_E f_n = \int_E f$$