10/11/2021

Recap:

Teorema (convergenza dominata di Lebesgue)

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile e sia $(f_n)_n$ di funzioni $f_n : E \to \mathbb{C}$ misurabili $\forall n$, convergente q.o. a una funzione $f : E \to \mathbb{C}$

Supponiamo che $\exists\ g : E \to \mathbb{R}_+$ integrabile e t.c.

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \text{q.o. in } E \quad \forall n$$

allora f_n è integrabile $\forall n$ e pure il limite puntuale q.o. f è integrabile e si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n = \int_E f$$

Esempio

Calcolare, se esiste il $\lim_n \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}$.

Denotiamo $\forall n \geq 1$ la funzione $f_n(x) = e^{-nx^2}$. $\forall n$ la funzione f_n è continua (infatti è C^∞) e quindi è una funzione misurabile.

- Notiamo che

$$\lim_n e^{-nx^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Questo limite (puntuale) identifica dunque la funzione target, denotata come f nell'enunciato del thm di convergenza dominata di L.

Ossia $f(x) = 0$.

- $|f_n(x)| = |e^{-nx^2}| \leq |e^{-x^2}|$

Abbiamo identificato un candidato per essere definito come funzione g nell'enunciato del thm di L, ossia

$$g(x) = e^{-x^2}$$

Sappiamo che la funzione g è integrabile in $\mathbb{R}$.

$\leadsto$ Applichiamo il thm di conv dominata di L

$$\leadsto \quad \exists \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$$

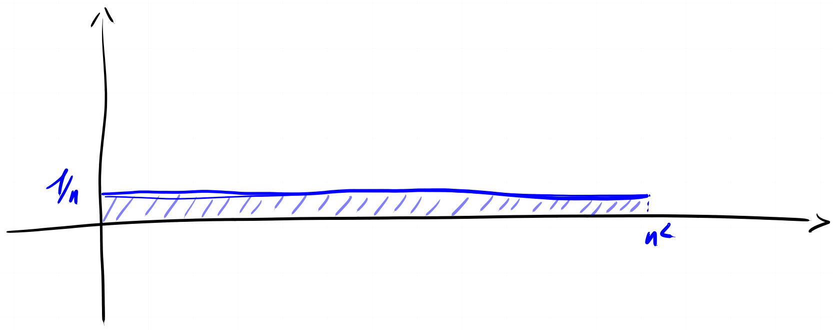
Oss Non è così banale il fatto che $\exists$ un limite degli integrali dell' esempio sopra. Infatti stiamo integrando una funzione che si converge a zero (puntualmente), ma che viene integrata in un dominio illimitato ($\mathbb{R}$).

!!

Necessità della funzione dominante g.

Esempio

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1/n & x \in [0, n^2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$\int_{\mathbb{R}} \phi_n = n^2 \cdot \frac{1}{n} = n$$

Conseguenze del thm di convergenza dominata

1) Supponiamo $f : E \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ misurabile con E misurabile se $\exists\, g : E \to \mathbb{R}_+$ integrabile e t.c.

$$|f(x)| \leq g(x)$$

allora f è integrabile

2) $f : E \to \mathbb{C}$, con E misurabile, si ha che f è integrabile sse $|f|$ è integrabile

3) Siano $f, g : E \to \mathbb{C}$ misurabili e t.c. $f(x) = g(x)$ q.o. si ha che f è integrabile in E sse g lo è, in tal caso si ha che

$$\int_E f = \int_E g.$$

Dim g int $\Rightarrow$ f int

se g è int allora per il punto 2) $|g|$ è integrabile

Siccome $f = g$ q.o. la funzione $|g|$ è la funzione dominante, a questo punto possiamo applicare il thm di c.d. L

Oss Visto il punto 3) possiamo dire che ai fini della teoria dell'integrazione di L possiamo identificare tutte le funzioni che differiscono in un insieme di misura nulla.

Un primer in analisi funzionale

D'ora in avanti denotiamo con la lettera $\mathbb{K}$ il campo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

[Per casa rivedere la definizione di campo]

Spazi normati

Sia E uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Un'applicazione $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ si dice **norma** se le seguenti condizioni sono verificate $\forall\, x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (non-degeneratezza)

2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ (omogeneità)

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subadditività)

In tal caso la coppia $(E, \|\cdot\|)$ si dice spazio normato

NB Se definiamo la funzione $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ come

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

la funzione d soddisfa gli assiomi della funzione distanza.

otteniamo che (E, d) è uno spazio metrico

$\rightsquigarrow$ La condizione di essere spazio normato è una condizione più forte di quella di spazio metrico.

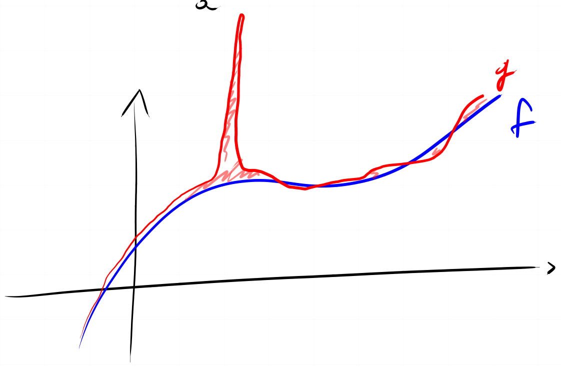
Esempi

- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
- $(\mathbb{C}, |\cdot|)$
- $(\mathbb{R}^N, |\cdot|_2)$, dove $|x|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2}$
- $\left(C^0([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\right)$

  dove $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
- $\left(C^0([a,b];\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right)$

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

NB



f e g sono "vicine" secondo la norma $\|\cdot\|_1$ mentre sono "lontane" per $\|\cdot\|_\infty$

Successione di Cauchy

Sia $(x_n)_n$ una successione in $(E, \|\cdot\|)$. Diciamo che $(x_n)_n$ è una **successione di Cauchy** se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ tc $\forall n, m > n_0$ si ha che

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon .$$

Alternativamente

$$\lim_{n,m \to \infty} \|x_n - x_m\| = 0 .$$

OSS Ogni successione convergente è una successione di Cauchy, ma non è detto che una successione di Cauchy sia convergente.

Esempio canonico di spazio metrico non completo

$(\mathbb{Q}, |\cdot|)$

Sappiamo che esistono molti numeri irrazionali $\sqrt{2}, \pi, \ldots$

Consideriamo $\sqrt{2}$ e consideriamo l'intorno

$$U_n = \left(\sqrt{2} - 1/n , \sqrt{2} + 1/n\right) \qquad \forall n \geq 1$$

Sappiamo che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Dunque so che $\exists q_n \in \mathbb{Q}$ tc $q_n \in U_n$

È possibile provare che la successione $(q_n)_n$ è di Cauchy ($\times$ casa)

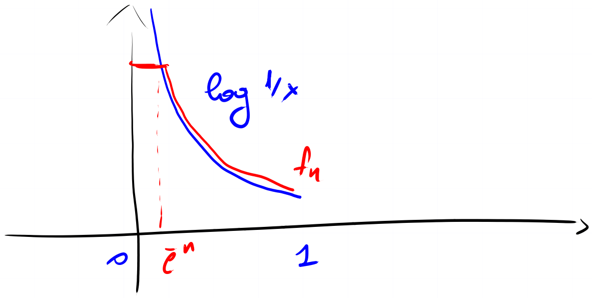
tuttavia per costruzione si ha che $q_n \xrightarrow{n \to \infty} \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Esercizio Costruire una successione di Cauchy nello spazio normato

$$\left(C^0([0,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right)$$

che non converge in $C^0([0,1]; \|\cdot\|_1)$

Suggerimento Considerare la successione $f_n(x) = \begin{cases} \log 1/x & \text{se } x \in [e^{-n}, 1] \\ n & \text{se } x \in [0, e^{-n}] \end{cases}$



Spazio di Banach

Uno spazio normato $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ nel quale ogni successione di Cauchy è convergente si dice spazio di Banach