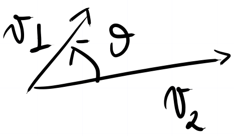
Recap

Spazio di Banach: $(E, \|\cdot\|)$ viene detto spazio normato se ogni successione di Cauchy è convergente in $(E, \|\cdot\|)$.

Sappiamo da Analisi 1 che una successione convergente è una successione di Cauchy, tuttavia l'implicazione opposta **non** è sempre vera.

Spazi dotati di un prodotto scalare

Esempio finito-dimensionale $\mathbb{R}^2$



$$v_1 \cdot v_2 = |v_1|\,|v_2| \cos\vartheta \rightsquigarrow \cos\vartheta = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1|\,|v_2|}$$

Conseguenze: se $v_1 \perp v_2 \Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0$

Definizione Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ un'applicazione binaria $(\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$ si dice **prodotto scalare** se $\forall\, x, y, z \in E$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

s1) $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$

s2) $(\lambda x, y) = \underline{\lambda (x,y)}$

s3) $(x,y) = (y,x)$

forma sesquilineare

s4) $(x,x) \geq 0$ e $(x,x) = 0$ sse $x = 0$.

OSS Se definiamo $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ è una funzione norma (x CASA).

Questo implica che dato un prodotto scalare su E possiamo canonicamente identificare uno spazio normato $(E, \|\cdot\|)$

Prodotto Scalare $\longrightarrow$ Norma $\longrightarrow$ funzione distanza

Disuguaglianza di Cauchy - Schwarz

$\forall x, y \in E \qquad |(x,y)| \leq \|x\| \ \|y\|$.

Esempi

- $(\mathbb{R}^N, (\cdot,\cdot))$, $\qquad (x,y) = \sum_{n=1}^{N} x_n y_n$

- $(\mathbb{C}^n, (\cdot,\cdot))$, $\qquad (x,y) = \sum_{n=1}^{N} x_n \overline{y_n}$

- $\left(C^0([a,b], \mathbb{C}), (\cdot,\cdot)_{L^2} \right)$

$$(f,g)_{L^2} = \int_a^b f(x) \, \overline{g(x)} \, dx$$

Def Sia $(E, (\cdot,\cdot))$ uno spazio t.c. $(E, \|\cdot\|)$, $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$

è uno spazio di Banach si dice spazio di Hilbert

Ossia uno spazio vettoriale con prodotto scalare che risulti completo rispetto alla norma canonica indotta dal p.s. si dice sp. di Hilbert.

Famiglie ortogonali e ortonormali

Sia $(E, (\cdot,\cdot))$ uno spazio vettoriale dotato di p.s.

Una famiglia $(e_\alpha)_{\alpha \in J}$ con $J \subseteq \mathbb{R}$ (tipicamente $J = \mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$)

si dice ortogonale se

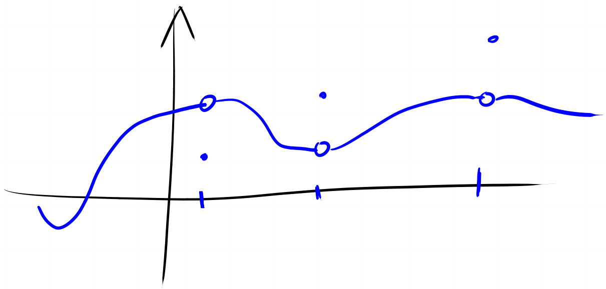
$$(e_\alpha, e_\beta) = 0 \qquad \forall\, \alpha \neq \beta \text{ in } J$$

Inoltre se $\|e_\alpha\| \equiv 1$ la famiglia si dice ortonormale

Esempio Le armoniche elementari sono famiglie ortogonali rispetto $(\cdot,\cdot)_{L^2}$

Gli spazi di Lebesgue L^1, L^2 e L^∞

D'ora in avanti $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è da considerarsi un insieme misurabile e identifichiamo f e g se $f(x) = g(x)$ q.o. in E



Lo spazio $L^1(E)$

Poniamo

$$L^1(E) = L^1(E;\mathbb{C})$$
$$= \left\{ f : E \to \mathbb{C} \text{, misurabili e t.c. } \int_E |f| < \infty \right\}$$

definiamo altresì

$$\|f\|_1 = \int_E |f|$$

$\|\cdot\|_1$ è una norma su $L^1(E)$ e la coppia $(L^1(E), \|\cdot\|_1)$ è uno sp. di Banach

Supponiamo che $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $g^* \in L^1$ se
$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g^*\|_1 = 0$$

Proprietà C_1 Sia $(f_n)_n$ una successione in L^1 che converge a f in L^1. $\exists$ una sottosuccessione $(f_{n_k})_k$ di $(f_n)_n$ t.c. $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f$ q.o. in E.

Lo spazio $L^2(E)$

Poniamo
$$L^2(E) = L^2(E;\mathbb{C})$$
$$= \left\{ f : E \to \mathbb{C},\ \text{misurabili e t.c.} \int_E |f|^2 < \infty \right\}$$

e definiamo
$$(f,g)_2 = \int_E f(x)\overline{g(x)} \qquad \text{e} \qquad \|f\|_2 = \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2}$$

$(\cdot,\cdot)_2$ è un prodotto scalare e $(L^2(E), (\cdot,\cdot))$ è uno spazio di Hilbert.

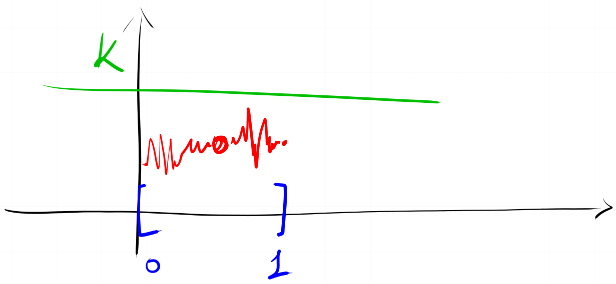
OSS Perchè la norma è elevata alla potenza $1/2$?
Ricordiamoci il secondo assioma definente la f_2 norma
$$\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$$
$$\|\lambda f\|_2 = \left(\int_E |\lambda f|^2\right)^{1/2} = \left(\int_E |\lambda|^2 |f|^2\right)^{1/2}$$
$$= \left(|\lambda|^2 \int_E |f|^2\right)^{1/2} = |\lambda| \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2}$$
$$= |\lambda|\, \|f\|_2$$

Proprietà C_2

Se $(f_n)_n \subseteq L^2$ tc $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ in L^2 allora $\exists\, (f_{n_k})_k$ tc $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f$ q.o. in E.

Lo spazio $L^\infty(E)$

$$L^\infty(E) = L^\infty(E;\mathbb{C})$$
$$= \{ f : E \to \mathbb{C} \text{ misurabili per le quali } \exists\, K > 0 \text{ tc } |f(x)| \leq K \text{ q.o. in } E \}$$



$E = [0,1]$

Possiamo definire una norma in $L^\infty(E)$

$$\|f\|_\infty = \inf \{ K > 0 \text{ tc } |f(x)| \leq K \text{ q.o. in } E \}$$

Lo spazio $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

Osservazioni

$E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile

- Se E è limitato allora
$$L^\infty(E) \subsetneq L^2(E) \subsetneq L^1(E)$$
e valgono le seguenti disuguaglianze
$$\|f\|_1 \leq \sqrt{m(E)}\, \|f\|_2 \qquad (1)$$
$$\|f\|_2 \leq \sqrt{m(E)}\, \|f\|_\infty \qquad (2)$$

- Se E non è limitato allora non si hanno inclusioni

Dim Vogliamo dimostrare (1) ossia dato una funzione $f \in L^2(E)$ vogliamo dimostrare che $f \in L^1(E)$ e la disuguaglianza (1) è vera

$$\int_E |f| = \int_E 1 \cdot |f| = (1, |f|)$$

Per CS si ha che

$$\leq \left(\int_E 1\right)^{1/2} \underbrace{\left(\int_E |f|^2\right)^{1/2}}_{= \|f\|_2}$$

Mentre siccome E è limitato $\int_E 1 = m(E)$

Inserendo tale risultato ottengo che

$$\|f\|_1 \leq m(E)^{1/2} \|f\|_2 .$$

- Dimostriamo ora (2). Sia $f \in L^\infty(E)$ e calcoliamo

$$\|f\|_2 = \left(\int_E |f|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sup_{x \in E} |f(x)|^2 \int_E 1\right)^{1/2}$$

$$\leq \sqrt{m(E)} \; \|f\|_\infty$$