

**Esercizio 1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $T$ -periodica e localmente integrabile, provare che

- Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$  vale

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, dx = \int_{\alpha-T/2}^{\alpha+T/2} f(x) \, dx$$

- Se  $f$  è dispari allora

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, dx = 0,$$

- Se  $f$  è pari allora

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, dx = 2 \int_0^{T/2} f(x) \, dx.$$

Dedurre che se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $T$ -periodica e localmente integrabile

- se  $f$  è dispari allora  $a_n(f) \equiv 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,
- se  $f$  è pari allora  $b_n(f) \equiv 0$  per ogni  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Esercizio 2.** Determinare la serie di Fourier di  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -periodica, definita da:

1.  $f(x) = \chi_{[-\pi/2, \pi/2]}$  in  $-\pi < x \leq \pi$  dove

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

- 2.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

3.  $f(x) = x$ ,

4.  $f(x) = 1 - 2x$ ,

- 5.

$$f(x) = \begin{cases} -x(\pi + x) & \text{se } -\pi < x \leq 0 \\ x(\pi - x) & \text{se } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

**Esercizio 3.** Si provi che le seguenti successioni

$$(\cos(n\bullet))_{n \in \mathbb{N}}, \quad (\sin(n\bullet))_{n \in \mathbb{N}^*},$$

non convergono nè puntualmente nè uniformemente in  $\mathbb{R}$ .