Esercizio 1. Sia f 2π-periodica tale che

$$c_n = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} \mathrm{d}x, \qquad |c_n| = \mathcal{O}\left(2^{-|n|}\right),$$

e definiamo

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Dimostrare che

1. $S_N \xrightarrow{N\to\infty} f$ in norma uniforme in $\mathbb{R}$ e,
2. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Siano $f, g \in \mathcal{C}^\infty$ e T-periodiche, dimostrare che

1. se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$,
2. $c_n(fg) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{n-k}(f)\, c_k(g)$,

Esercizio 3. Si considerino le seguenti serie trigonometriche

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n i}{1+n^{3/2}}\, e^{inx},$$

$$\sum_{n\geq 1} \left[2^{-n}\cos\left(n\sqrt{2}\, x\right) + (-2)^{-n}\sin\left(n\sqrt{2}\, x\right)\right],$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1+i}{n!} e^{in2x},$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{n}\,(1+n^5)}\, \sin(3n\, x),$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2^n}{3^n+4^n}\, e^{in2x},$$

studiare

1. Convergenza puntuale, uniforme e in energia,
2. Nel caso la serie converga a una funzione target determinare periodo, frequenza angolare e regolarità della funzione limite.