Foglio di esercizi 5

Metodi Matematici per l'IA

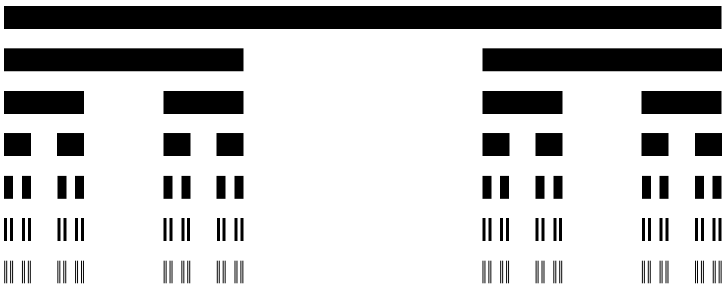
25-10-2022

Esercizio 1. Dimostrare che i seguenti insiemi in $\mathbb{R}^N$ hanno misura di Lebesgue nulla costruendo esplicitamente un ricoprimento numerabile di misura ε:

- $A_1 = (n)_{n\in\mathbb{Z}}$,
- $A_2 = (1/n)_{n\in\mathbb{Z}^\star}$,
- $A_3 = \mathbb{Q}^N,\ N \geq 1$,
- $A_4 = \mathbb{Q}^\omega = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots$ *Difficile, extra,*
- $A_6 = \left(\frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n^2 2^k}\right)\right)_{n,k\in\mathbb{N}^\star}$ *Difficile, extra.*

Esercizio 2 (Difficile)**.** Definiamo *l'insieme di Cantor* $\mathcal{C}$ nella maniera seguente;

- Prendiamo l'intervallo chiuso $C_0 = [0,1]$ e ad esso sottraiamo l'insieme ternario aperto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Definiamo $C_1 = C_0 \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
- Definiamo gli insiemi ternari di secondo ordine $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Definiamo $C_2 = C_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right)$.
- Reiterare la procedura all'infinito (vedere figura per un'idea precisa).



Dimostrare:

1. Che l'insieme di Cantor ha misura di Lebesgue nulla e,
2. Che l'insieme di Cantor ha la stessa cardinalità del segmento reale $[0,1]$.
   Suggerimento: Notare che ogni elemento x del segmento reale che appartiene all'insieme di Cantor si può scrivere, nella sua notazione in base tre, come $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ dove $a_n = 0, 2$. Relazionare tale osservazione con la rappresentazione binaria di $[0,1]$,
3. Che l'insieme di Cantor ha una cardinalità superiore a quella dei numeri naturali (a.k.a. $\mathcal{C}$ non è numerabile).

Concludere che esistono insiemi non-numerabili con misura di Lebesgue nulla.

Esercizio 3 (Spazi normati non completi)**.** Considerare lo spazio normato $\left(\mathcal{C}\left([-1,1]\right); \|\bullet\|_1\right)$. Dimostrare che le sequenze

- $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se} \quad |x| \leq e^{-n} \\ -\log|x| & \text{se} \quad e^{-n} \leq |x| \leq 1 \end{cases}$,
- $g_n(x) = \operatorname{sgn}(x) \ \sqrt[n]{|x|}$,
- $h_n(x) = (1 - |x|)^n$,

sono sequenze di Cauchy rispetto alla norma $\|\bullet\|_1$ tuttavia non convergono a elementi di $\left(\mathcal{C}\left([-1,1]\right); \|\bullet\|_1\right)$.