Esercizio 1. Dimostrare che tutte le norme definite su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti.

Esercizio 2. Consideriamo lo spazio $C^0([a,b])$ delle funzioni continue nell'intervallo $[a,b]$ e definiamo le seguenti norme

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$$

e

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

per ogni $f \in C^0([a,b])$. Provare che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ non sono equivalenti.

Esercizio 3. Consideriamo lo spazio $C^1([a,b])$ delle funzioni continue e con derivata continua nell'intervallo $[a,b]$. Definiamo la seguente norma

$$\|f\|_{C^1} := |f(a)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| = |f(a)| + \|f'\|_\infty \ ,$$

dove $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma del $\sup$ definita su $C^0([a,b])$.

(i) Provare che $C^1([a,b])$ con la norma appena definita è uno spazio di Banach.

(ii) Si definisca sullo stesso spazio la norma

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \ .$$

Provare che $\|\cdot\|_{C^1}$ e $\|\cdot\|$ sono equivalenti.