Foglio di esercizi 7
Metodi Matematici per l'IA

25-10-2022

Definiamo

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

e

$$f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi\,.$$

Esercizio 1. Calcolare la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

1. $$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x \le 0 \\ 0 & \text{se} \quad x > 0\,; \end{cases}$$

2. $$f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{se} \quad x \le 0 \\ e^{-2x} & \text{se} \quad x > 0\,; \end{cases}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{se} \quad x \le 0 \\ 0 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

   con $a > 0$;

4. $$f(x) = \begin{cases} a & \text{se} \quad -b \le x \le b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   con $a, b > 0$;

5. $$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se} \quad x < 0 \\ e^{-x} & \text{se} \quad x \ge 0\,. \end{cases}$$

Esercizio 2. Calcolare la trasformata di Fourier della gaussiana:

$$f(x) = e^{-x^2}\,.$$

Esercizio 3. Siano $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$ e $f'' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora, dimostrare che si ha $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 4. Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Allora, dimostrare che si ha

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x)\, dx\,;$$

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}\, dx \qquad \text{(identità di Parseval)}\,;$$

3. $$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\,;$$

4. $$\widehat{fg}(\xi) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\xi)\,.$$