

Definiamo

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

e

$$f(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

Esercizio 1. Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = i(4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

Esercizio 2. Osserviamo che se

$$g(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad \text{con} \quad a > 0,$$

allora abbiamo

$$\hat{g}(\omega) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}.$$

Quindi, calcolare le seguenti trasformate di Fourier:

1.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{9(x-1)^2 + 1};$$

2.

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Esercizio 3. Notiamo che se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, allora si ha

$$\langle \overline{\mathcal{F}(f)}, \overline{\mathcal{F}(g)} \rangle_2 = 2\pi \langle f, g \rangle_2.$$

Calcolare:

1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4+x^2)^2} dx;$$

2.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(4+x^2)^2} dx;$$

3.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx;$$

4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2x \sin(x) e^{-x^2} dx;$$

5.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(3x) dx;$$

6.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(2x)}{(4+x^2)^2} dx;$$

7.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{9+x^2} dx.$$

Esercizio 4. Risolvere in \mathbb{R} la seguente PDE

$$u''(x) + xu'(x) + u(x) = 0,$$

cercando soluzioni $u \in C^2(\mathbb{R})$ con u, u' e u'' in $L^1(\mathbb{R})$.