Stima asintotica

Esercizi

Es 1 | Dato il processo stocastico stazionario descritto da

$$\mathcal{Y}: \quad y(t) = a^{\circ} y(t-1) + e(t)$$

AR(1)

con $|a^{\circ}| < 1$, $e(\cdot) \sim WN(0, \lambda_e^2)$

si vuole identificarlo facendo uso del modello

$$\mathcal{M}: \quad y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \xi(t)$$

AR(2)

con $\xi \sim WN(0, \bar{\lambda}_{\xi}^2)$

Determinare la soluzione asintotica:

$$\hat{\vartheta}_N = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[N \to +\infty]{} ?$$

(N n° di dati osservati a disposizione)

Soluzione

$|a_0| < 1 \implies$ processo y è stazionario !

A partire da $\mathcal{M}$ determino l'espressione del predittore ottimo ad 1 passo:

$$\hat{y}(t|t-1) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2)$$

e calcolo l'errore di predizione

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1)$$

Il funzionale di costo è quindi

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [\varepsilon(i)]^2$$

e per $N \to +\infty$ diventa

$$\bar{J}(\theta) = E[\varepsilon^2(t)]$$

$$\bar{J}(\theta) = E[\varepsilon^2(t)] = E\{[y(t) - \hat{y}(t|t-1)]^2\} =$$

utilizzo $\mathcal{S}$ utilizzo $\mathcal{M}$

$$\bar{J}(\theta) = E\{[a^0 y(t-1) + e(t) + - a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2)]^2\} =$$

raccolgo

$$\bar{J}(\theta) = E\{[(a^0 - a_1)\, y(t-1) + e(t) - a_2 y(t-2)]\}$$

è osservazione di $\mathcal{S}$ → la esprimo allora in funzione di $y(t-2)$ usando la descrizione di $\mathcal{S}$

$$\bar{J}(\theta) = E\left\{\left[(a^0 - a_1)\left(a^0 y(t-2) + e(t-1)\right) + e(t) + - a_2\, y(t-2)\right]^2\right\}$$

raccolgo

$$\bar{J}(\theta) = E\left\{\left[\left(a^0(a^0 - a_1) - a_2\right) y(t-2) + (a^0 - a_1)\, e(t-1) + e(t)\right]^2\right\}$$

sviluppo il quadrato ed applico l'operatore E( )

$$\bar{J}(\theta) = (a_0^2 - a_0 a_1 - a_2)^2\, E\left\{[y(t-2)]^2\right\} + \lambda_e^2 + (a^0 - a_1)^2 \lambda_e^2$$

tutti gli altri termini sono nulli!

$$\bar{J}(\theta) = (a^{o^2} - a^o a_1 - a_2)^2 E\{[y(t-2)]^2\} +$$

questo vale ?

$$+ [1 + (a^o - a_1)^2] \lambda_e^2$$

Dalla definizione di y: $E[y(t)] = 0$

$$\Downarrow$$

$$E\{[y(t)]^2\} = \sigma_y^2$$

quindi:

$$\sigma_y^2 = E\{[a^o y(t-1) + e(t)]^2\} =$$

$$= (a^o)^2 \sigma_y^2 + \lambda_e^2$$

In definitiva

$$\mathrm{var}\, y = \sigma_y^2 = \frac{\lambda_e^2}{1-(a^\circ)^2}$$

Dato che a regime y è processo stazionario allora vale che

$$E\left\{\left[y(t-2)\right]^2\right\} = E\left\{\left[y(t)\right]^2\right\} = \sigma_y^2$$

Sostituisco e ottengo

$$\bar{J}(\vartheta) = \left[(a^\circ)^2 - a^\circ a_1 - a_2\right]^2 \frac{\lambda_e^2}{1-(a^\circ)^2} +$$

$$\vartheta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad + \left[1 + (a^\circ - a_1)^2\right] \lambda_e^2$$

Determino il modello ottimo della famiglia $\mathcal{M}$, minimizzando $\bar{J}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{J}}{\partial e_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \bar{J}}{\partial e_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2a^0\left[(a^0)^2 - a^0 e_1 - e_2\right]\dfrac{\lambda_e^2}{1-(a^0)^2} - 2(a^0 - e_1)\lambda_e^2 \\ 0 = -2\left[(a^0)^2 - a^0 e_1 - e_2\right]\dfrac{\lambda_e^2}{1-(a^0)^2} \end{cases}$$

dato che $\lambda_e^2 \neq 0$

$|a^0| < 1$

deve essere $(a^0)^2 - a^0 e_1 - e_2 = 0$

Sostituisco nella 1° relazione ↗

$$\begin{cases} -2\left(a^{\circ}-a_1\right)\lambda_e^2 = 0 \\ (a^{\circ})^2 - a^{\circ}a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1 = a^{\circ} \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

Il modello ottimo allora è $\theta^{\circ} = \begin{bmatrix} a^{\circ} \\ 0 \end{bmatrix}$

Quale è l'espressione dell'errore di predizione quando si utilizza il modello M con θ° ?

$\boxed{\text{Es. 2}}$ Dato il processo stocastico descritto da

$$\mathcal{S}: \begin{cases} y(t) = a^\circ u(t) + \eta(t) \\ \eta(t) = e(t) + \frac{1}{2} e(t-1) \end{cases}$$

con $\quad u(t) = 1 \quad \forall t \qquad\qquad e(\cdot) \sim WN(0,1)$

si vuole identificare il processo con un modello della famiglia

$$\mathcal{M}: \quad y(t) = a\, u(t) + \xi(t) \qquad \xi(\cdot) \sim WN(0, \lambda^2)$$

(a) Si vuole stimare il parametro a del modello M utilizzando LS

$$\hat{a}_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} ?$$

(b) Che cosa cambierebbe se fosse

$$e(\cdot) \sim WN(1, 1) ?$$

$\boxed{\text{Soluzione}}$ Dal modello $\mathcal{M}$ ottengo il predittore ad 1 passo

(a)

$$\hat{y}(t|t-1) = a\, u(t) = a$$

$u(t) \equiv 1 \;\forall t$

ed esprimo l'errore di predizione

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1)$$
$$= (a^{\circ} - a) + \eta(t)$$

Il funzionale da minimizzare è dato da (per N dati osservati)

$$J_N(a) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} [\varepsilon(i)]^2$$

e per $N \to +\infty$ diventa

$N \to +\infty$: $\quad \bar{J}(a) = E\left\{ \left[(a^0 - a) + \eta(t) \right]^2 \right\}$

$$\bar{J}(a) = E\left\{ (a^0 - a)^2 + \eta^2(t) + 2(a^0 - a)\eta(t) \right\} =$$

sfrutto $E[\eta] = 0$

$$\bar{J}(a) = (a^0 - a)^2 + var(\eta)$$

Minimizzo $\bar{J}$:

$$\arg\min \bar{J}(a) = a^0$$

quindi $\quad \hat{a}_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} a^0$ caso ④

(b) Sfortuna $E[\eta(t)] \neq 0$

$$E[\eta(t)] = E\left[e(t) + \frac{1}{2} e(t-1)\right] = \frac{3}{2}$$

Riscrivo la cifra di merito asintotica

$$\bar{J}(a) = E\left\{\left[(a^0 - a) + \eta(t)\right]^2\right\} =$$

$$= (a^0 - a)^2 + \underbrace{E[\eta^2(t)]}_{\mathrm{var}[\eta] = E[\eta^2] - \{E[\eta]\}^2} + 2(a^0 - a)\underbrace{E[\eta(t)]}_{\frac{3}{2}}$$

$$E[\eta] = \frac{3}{2}$$

$$E[q^2] = \text{var}[q] + [E(q)]^2 = \sigma_q^2 + \frac{9}{4}$$

quindi

$$\bar{J}(a) = (a^\circ - a)^2 + \left[\sigma_q^2 + \frac{9}{4}\right] + 3(a^\circ - a)$$

Minimizzando il funzionale

$$\frac{d\bar{J}}{da} = 0 \Longrightarrow \quad 2(a - a^\circ) + 3 = 0$$

$$a = a^\circ + \frac{3}{2}$$

c) Che succederebbe se fosse

$$y(t) = \frac{1}{5} y(t-1) + e(t) \qquad ?$$

$$e(\cdot) \sim WN(0,1)$$

NB il processo y nei casi a), b) è ARMAX mentre il modello è ARX.

Nel caso c) il processo y è ARXAR mentre il modello è sempre ARX.

Che espressione ha l'errore di predizione nei 3 casi?

Nel caso © vale ancora $E[\eta(t)] = 0$
come nel caso ⓐ

$$\Downarrow$$

Allora la soluzione asintotica è
la stessa del caso ⓐ

$$\hat{a}_N \to a^\circ$$

NB gli errori di predizione ottima
nei casi ⓐ, © per $N \to \infty$ sono
differenti!

Es. 3 Sono disponibili N osservazioni della variabile aleatoria di un processo stocastico stazionario

$$\{ y(1), y(2), y(3), \dots y(N) \}$$

Come famiglia di modelli per la descrizione del processo stocastico di $y(\cdot)$ si sceglie

$$\mathcal{M}: \quad y(t) = a\, y(t-1) + e(t) \qquad AR(1)$$

$$e(\cdot) \sim WN(0, \lambda_e^2)$$

Con $\hat{a}_N$ indichiamo la stima LS del parametro "a" del modello $\mathcal{M}$.

A quale valore tende $\hat{a}_N$ al crescere del numero di osservazioni N

$$\hat{a}_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \; ?$$

nei 2 casi:

ⓐ $\mathcal{S}: y(t) = \frac{3}{10} y(t-1) + \xi(t) \qquad \xi(\cdot) \sim WN(0,1)$

ⓑ $\mathcal{S}: y(t) = \frac{3}{10} y(t-1) + \xi(t) + \frac{1}{2} \xi(t-1)$

$\xi(\cdot) \sim WN(0,1)$

Soluzione

Dal modello ottengo il predittore ad 1 passo

$$\hat{\mathcal{M}}_a : \quad \hat{y}(t|t-1) = a\, y(t-1)$$

Per N elevato posso scrivere

$$\hat{a}_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \arg\min \bar{J}(a)$$

$$\bar{J}(a) = E\left\{\left[y(t) - \hat{y}(t|t-1)\right]^2\right\} =$$

$$\hat{y}(t|t-1) = a\, y(t-1)$$

$$\bar{J}(a) = E\left\{\left[y(t)\right]^2\right\} + a^2 E\left\{\left[y(t-1)\right]^2\right\} - 2a E\left\{y(t)\, y(t-1)\right\}$$

In entrambi i casi (a), (b) $E\{y(t)\} = 0$ ed il processo è stazionario:

$$E\{[y(t)]^2\} = \sigma_y^2 = E\{[y(t-1)]^2\}$$

$$\bar{J}(a) = \underbrace{E\{[y(t)]^2\}}_{\sigma_y^2 = \gamma_{yy}(0)} + a^2 \underbrace{E\{[y(t-1)]^2\}}_{\sigma_y^2 = \gamma_{yy}(0)} - 2a \underbrace{E\{y(t)\,y(t-1)\}}_{\gamma_{yy}(1)}$$

$$\bar{J}(a) = (1+a^2)\,\gamma_{yy}(0) - 2a\,\gamma_{yy}(1)$$

Il minimo di $\bar{J}$ si ottiene per

$$\frac{d\bar{J}}{da} = 0 \longrightarrow 2a\,\bar{\gamma}_{yy}(0) - 2\bar{\gamma}_{yy}(1) = 0$$

$$a = \frac{\bar{\gamma}_{yy}(1)}{\bar{\gamma}_{yy}(0)}$$

Ovviamente nei 2 casi a, b i valori $\bar{\gamma}_{yy}(0)$ e $\bar{\gamma}_{yy}(1)$ saranno determinati $\longrightarrow$

(a)

$$\gamma_{yy}(0) = var\left[y(t)\right] = \sigma_y^2$$

$$\gamma_{yy}(1) = E\left[y(t)\,y(t-1)\right] =$$

$$= E\left\{\left[\frac{3}{10}\,y(t-1) + \xi(t)\right]\cdot y(t-1)\right\} =$$

$$= \frac{3}{10}\,\gamma_{yy}(0) + 0 = \frac{3}{10}\,\gamma_{yy}(0)$$

quindi:

(c) $$\hat{a}_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \bar{a} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

(b)

$$\gamma_{yy}(0) = \text{var}[y(t)] =$$

$$= \frac{9}{100}\,\text{var}[y(t-1)] + \text{var}[\xi(t)] + \frac{1}{4}\,\text{var}[\xi(t-1)] +$$

$$+ 2\cdot\frac{3}{10}\,\underbrace{E\{y(t-1)\,\xi(t)\}}_{0} +$$

$$+ 2\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}\,E\{y(t-1)\,\xi(t-1)\} +$$

$$E\{[\xi(t-1)]^2\} = \text{var}\,\xi$$

$$+ 2\cdot\frac{1}{2}\,\underbrace{E\{\xi(t)\cdot\xi(t-1)\}}_{0}$$

$$\gamma_{yy}(0) = \frac{9}{100}\gamma_{yy}(0) + \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{10}\right] \cdot \underbrace{\operatorname{var}[\xi]}_{\operatorname{var}\xi = 1}$$

$$\left(1 - \frac{9}{100}\right)\gamma_{yy}(0) = \frac{31}{20} \Rightarrow \gamma_{yy}(0) = \frac{31}{\cancel{20}_{1}} \cdot \frac{\cancel{100}^{5}}{91} = \frac{155}{91}$$

$$\gamma_{yy}(1) = E\left\{y(t)\, y(t-1)\right\} =$$

$$y(t) = \frac{3}{10} y(t-1) + \xi(t) + \frac{1}{2}\xi(t-1)$$

$$= \frac{3}{10} E\left\{\left[y(t-1)\right]^2\right\} + E\left[\xi(t)\, y(t-1)\right] + \frac{1}{2} E\left[y(t-1)\,\xi(t-1)\right]$$

$$\gamma_{yy}(1) = \frac{3}{10}\gamma_{yy}(0) + \phi + \frac{1}{2}\,\text{var}\,\xi$$

$$= \frac{3}{10}\cdot\frac{155}{91} + \frac{1}{2} = \frac{92}{91}$$

In definitiva:

(b)

$$\gamma_{yy}(0) = \frac{155}{91}$$

$$\gamma_{yy}(1) = \frac{92}{91}$$

$$\hat{a}_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \bar{a} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{92}{155} \simeq 0{,}59$$

Es 9 Il processo stocastico ARMA descritto dalla equazione alle differenze

$$y(t) = a^\circ y(t-1) + e(t) + c^\circ e(t-1)$$

con $|a^\circ| < 1$, $|c^\circ| < 1$, $e(\cdot) \sim WN(0, \lambda_e^2)$

viene identificato col metodo MEP, utilizzando un numero molto elevato di dati ed un modello della famiglia

$$\mathcal{M}: \quad y(t) = a\, y(t-1) + v(t) \qquad AR(1)$$

$$v(\cdot) \sim WN(0, \lambda_v^2)$$

(a) $\hat{a}_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} ?$

(b) $\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) = ?$

$\boxed{\text{Soluzione}}$ Il predittore ad 1 passo è dato da

$$\hat{y}(t|t-1) = a\, y(t-1)$$

Avendo a disposizione N osservazioni, il funzionale di costo da minimizzare vale

$$J_N(a) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[y(t) - \hat{y}(t|t-1) \right]^2$$

e al solito

$$J_N(a) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \bar{J}(a) = E\left\{ \left[y(t) - \hat{y}(t|t-1) \right]^2 \right\}.$$

Facendo uso dell'espressione di $\hat{y}(t|t-1)$ in $\bar{J}(a)$ si ottiene:

$$\bar{J}(a) = E\left\{ y^2(t) + a^2 y^2(t-1) - 2a\, y(t)y(t-1) \right\} =$$

$$= \underbrace{E\left[y^2(t)\right]}_{\gamma_{yy}(0)} + a^2 \underbrace{E\left[y^2(t-1)\right]}_{\gamma_{yy}(0)} - 2a \underbrace{E\left[y(t)y(t-1)\right]}_{\gamma_{yy}(1)}$$

$$\bar{J}(a) = (1+a^2)\,\gamma_{yy}(0) - 2a\,\gamma_{yy}(1)$$

Il minimo si ottiene per

$$\frac{d\bar{J}}{da} = 0 \implies 2a\,\gamma(0) - 2\gamma(1) = 0$$

$$a = \gamma(1) / \gamma(0)$$

Per determinare $\gamma(0)$ e $\gamma(1)$ posso risolvere queste equazioni

$$\begin{cases} \gamma_y(0) = (a^0)^2 \gamma_y(0) + 1 + (c^0)^2 + 2a^0c^0 \\ \gamma_y(1) = a^0 \gamma_y(0) + c^0 \end{cases}$$

$y(t) = a^0 y(t-1) + \cdots$

svolto $E[y^2(t)] \cdots$

$E[y(t) \cdot y(t-1)] = \gamma_y(1)$

$y(t) = a^0 y(t-1) + \cdots$ sostituisco, sviluppo l'espressione e poi svolto $E(\cdot)$ termine a termine

Dalla 1ª espressione

$$\gamma_y(0) = \frac{1+(a^\circ)^2 + 2a^\circ c^\circ}{1-(a^\circ)^2}$$

Sostituisco nella 2ª espressione

$$\gamma_y(1) = a^\circ \gamma_y(0) + c^\circ$$

da cui

$$\hat{a} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = a^\circ + \frac{c^\circ}{\gamma(0)}$$

(a) $$\hat{a} = a^{\circ} + \frac{c^{\circ}\left[1-(a^{\circ})^{2}\right]}{1+(c^{\circ})^{2}+2a^{\circ}c^{\circ}}$$

NB $\hat{a} \equiv a^{\circ} \Longleftrightarrow c^{\circ}=0$ (y è AR(1))

(b) Che espressione ha l'errore $\varepsilon(t)$?

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1) = \left[a^{\circ} - \hat{a}\right] y(t-1) + e(t) + c^{\circ} e(t-1)$$

$$\varepsilon(t) = (a^0 - \hat{a})\underbrace{y(t-1)}\, + e(t) + c^0 e(t-1)$$

NON è WN!

uso la funzione di trasferimento del processo ARMA, alimentato dal rumore WN $e(t)$

$$\varepsilon(t) = [a^0 - \hat{a}] \cdot z^{-1} \frac{1 + c^0 z^{-1}}{1 + a^0 z^{-1}} \cdot e(t) + (1 + c^0 z^{-1})\, e(t)$$

ora risolvo

$$\varepsilon(t) = \frac{(1+c^0 z^{-1})\left[(a^0-\hat{a})z^{-1} + (1-a^0 z^{-1})\right]}{1-a^0 z^{-1}} \cdot e(t)$$

Rielaboro:

$$\varepsilon(t) = \frac{(1+c^0 z^{-1})(1-\hat{a} z^{-1})}{1-a^0 z^{-1}} \cdot e(t)$$

$\varepsilon(t)$ è la r.a. di un processo ARMA(1,2)