Lezione 24

Def Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$.

Un'applicazione $f: V \to W$ è lineare se:

i) $f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in V$

ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in V$.

OSS $f: V \to W$ lineare $\Rightarrow f(0_V) = f(0 \cdot 0_V) = 0\, f(0_V) = 0_W$

Prop $f: V \to W$ è lineare $\Leftrightarrow$

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $f(\alpha u + \beta v) = f(\alpha u) + f(\beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ i) $\alpha = \beta = 1$

ii) $\beta = 0$

OSS $f: V \to W$ lineare $\Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_k v_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_k f(v_k)$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha_i \in \mathbb{K}, \forall v_i \in V \ (i = 1, \dots, k)$.

Es $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$L_A(X) = AX$$

è lineare infatti:

$$L_A(X + X') = A(X + X') = AX + AX' = L_A(X) + L_A(X')$$

$$L_A(\alpha X) = A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha L_A(X)$$

$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall X, X' \in \mathbb{K}^n$

Def L_A è detta applicazione lineare indotta da A.

Def Sia $f: V \to W$ lineare. L'immagine di f è
$$\operatorname{im} f := \{ f(v) \mid v \in V \} = f(V) \subset W$$

Def Il nucleo di f è
$$\ker f := \{ v \in V \mid f(v) = 0_W \} = f^{-1}(0_W) \subset V$$
kernel

Prop Sia $f: V \to W$ lineare. Allora:

i) $\operatorname{im} f$ è sottospazio vettoriale di W

ii) $\ker f$ è sottospazio vettoriale di V.

Dim i) $f(0_V) = 0_W \in \operatorname{im} f \neq \emptyset$;

$\forall\, \alpha, \alpha' \in \mathbb{K}, \ \forall\, w, w' \in \operatorname{im} f \Rightarrow \exists\, v, v \in V$ t.c. $w = f(v), \ w' = f(v')$

$\Rightarrow f(\alpha v + \alpha v') = \alpha f(v) + \alpha' f(v') = \alpha w + \alpha' w' \Rightarrow \alpha w + \alpha' w' \in \operatorname{im} f$

ii) $f(0_V) = 0_W \Rightarrow 0_V \in \ker f \neq \emptyset$

$\forall\, \alpha, \alpha' \in \mathbb{K}, \ \forall\, v, v' \in \ker f \Rightarrow f(\alpha v + \alpha' v') = \alpha \underbrace{f(v)}_{0_W} + \alpha' \underbrace{f(v')}_{0_W} = 0_W$

$\Rightarrow \alpha v + \alpha' v' \in \ker f$.

Def Sia $f: V \to W$ lineare. Il rango di f è
$$\operatorname{rg} f := \dim(\operatorname{im} f).$$

Prop Sia $f: V \to W$ lineare e $V = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) \Rightarrow$
$$\operatorname{im} f = \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_k))$$

Dim $\forall\, w \in \operatorname{im} f \ \exists\, v \in V$ t.c. $f(v) = w \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ t.c.
$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \Rightarrow w = f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(v_i)$$
$\Rightarrow w \in \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_k)) \Rightarrow \operatorname{im} f \subset \operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_k))$.

D'altra parte $f(v_1), \dots, f(v_k) \in \operatorname{im} f$ sottosp. vett di $W \Rightarrow$

$\operatorname{span}(f(v_1), \dots, f(v_k)) \subset \operatorname{im} f$.

Corollario Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora $\operatorname{rg} L_A = \operatorname{rg} A$.

Dim $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ base canonica di $\mathbb{K}^n$

$$L_A(e_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_{(1)}$$

$$L_A(e_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_{(2)}$$

$$\vdots$$

$$L_A(e_n) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A_{(n)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{im} L_A = \operatorname{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}) \Rightarrow \operatorname{rg} L_A = \operatorname{rg} A.$$

Teorema della dimensione Sia $f: V \to W$ lineare e $\dim V < \infty$. Allora $\dim(\operatorname{im} f) < \infty$ e si ha

$$\dim V = \dim(\ker f) + \operatorname{rg} f.$$

Dim $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_k)$ base per $\ker f \Rightarrow \dim(\ker f) = k$ $\overset{\text{estensione base}}{\rightsquigarrow}$

$(v_1, \dots, v_r, b_1, \dots, b_k)$ base di $V \Rightarrow \dim V = r + k$

$\rightsquigarrow w_1 = f(v_1), \dots, w_r = f(v_r)$, $0_W = f(b_i)$ $\forall i = 1, \dots, k$

$\Rightarrow \operatorname{im} f = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_r)$ e mostriamo che $(w_1, \dots, w_r)$ è base per $\operatorname{im} f$. Dobbiamo solo far vedere che sono lin. indip.

$\alpha_i \in \mathbb{K}$, $\quad \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r = 0_W \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i\right) = 0_W \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i \in \ker f \Rightarrow$$

$$\exists \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i = 0_V \Rightarrow \alpha_i = 0, \ \mu_i = 0 \quad \forall i \ (\text{base di } V).$$

$\Rightarrow w_1, \dots, w_r$ base di $\operatorname{im} f \Rightarrow \operatorname{rg} f = r$

$\dim V = r + k = \operatorname{rg} f + \dim(\ker f)$.

Es $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $v \in \mathbb{K}^n$, $v \in \ker L_A \iff L_A(v) = 0 \iff Av = 0$

$\iff v \in \Sigma_S$, $S : AX = 0_{\mathbb{K}^m}$

$\implies \ker L_A = \Sigma_S$.

Per trovare $\ker L_A$ si deve risolvere il sistema omogeneo

$$AX = 0.$$

Per trovare base di $\operatorname{im} f$ si deve estrarre una base delle colonne di A.

Sia ora

$\dim V = n$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V

$\dim W = m$, $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ base per W

$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i$ per certi $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $\rightsquigarrow$ $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

$j = 1, \dots, n$.

Teorema Se $v = X^{\mathcal{B}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \implies f(v) = Y^{\mathcal{C}}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ con:

$$\boxed{Y = AX}$$

Dim $v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \implies f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(b_j) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) c_i = \sum_{i=1}^{m} y_i c_i$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = A^{(i)} X \quad , \; i = 1, \dots, m \implies$$

$$Y = AX$$

Def A è detta matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ per V e alla base $\mathcal{C}$ per W e si scrive $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Importante $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ è costruita per colonne: la colonna j-esima è formata dalle coordinate di $f(v_j)$ nella base $\mathcal{C}$ per W.

OSS $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$$M_{\mathcal{E}_n}^{\mathcal{E}_m}(L_A) = A .$$

Infatti $Ae_j = A_{(j)}$, $j = 1, \dots, n$.