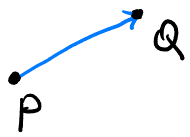
Lezione 23 Geometria affine

Abbiamo visto i sottospazi affini di spazi vettoriali, in particolare di $\mathbb{R}^n$. Ora generalizziamo questo concetto.

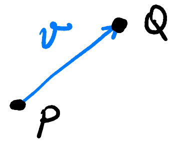
Def Sia $\mathbb{K}$ un campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Uno <u>spazio affine</u> su V è un insieme non vuoto A munito di una funzione

$$A \times A \longrightarrow V \qquad \text{struttura affine su } A$$
$$(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ}$$



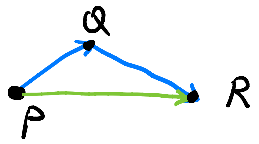
che soddisfa i seguenti assiomi:

1) $\forall P \in A,\ \forall v \in V\ \exists!\ Q \in A$ t.c. $v = \overrightarrow{PQ}$



2) $\forall P, Q, R \in A,\ \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

<u>Relazione di Chasles</u>



Per definizione si pone <u>$\dim A := \dim V$</u>.

Gli elementi di A sono chiamati <u>punti</u> di A.

A è detto <u>retta affine</u> se $\dim A = 1$, <u>piano affine</u> se $\dim A = 2$.

OSS 1) $\forall P \in A \Rightarrow \overrightarrow{PP} = 0_V$, infatti dalla (2)

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} \Rightarrow \overrightarrow{PP} = 0_V$$

2) $\forall P, Q \in A \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$, infatti da (2)

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0_V \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}.$$

3) $\forall P_0, \dots, P_n \in A \Rightarrow \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \dots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \overrightarrow{P_0P_n}$

segue applicando la (2) n volte.

Es V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $A = V$ con la funzione

$$V \times V \to V$$
$$(P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} := Q - P.$$

Verifichiamo gli assiomi (1) e (2):

1) $\forall P \in A = V$, $\forall v \in V$, $v = Q - P$ è soddisfatta solo per $Q = P + v$.

2) $\forall P, Q, R \in A$, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = Q - P + R - Q = R - P = \overrightarrow{PR}$.

Pertanto ogni spazio vettoriale può essere riguardato come spazio affine su sé stesso.

Un caso speciale si ha per $V = \mathbb{K}^n$:

$\mathbb{K}^n$ è detto <u>spazio affine numerico n-dimensionale su $\mathbb{K}$</u>

$\mathbb{R}^n$ <u>spazio affine numerico n-dimensionale reale</u>

$\mathbb{R}$ <u>retta affine reale</u>, $\mathbb{R}^2$ <u>piano affine reale</u>

$\mathbb{R}^3$ <u>spazio affine ordinario reale</u>

$\mathbb{C}^n$ <u>spazio affine numerico n-dimensionale complesso</u>.

$\mathbb{C}$ retta affine complessa, $\mathbb{C}^2$ piano affine complesso.

OSS $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ possono essere considerati sia come spazi vettoriali che come spazi affini (su sé stessi).

Sottospazi affini di V

Dato $Q_0 \in V$ e $W \subset V$ sottospazio vettoriale, il sottospazio affine passante per Q_0 e con giacitura (o <u>parallelo a</u>) W è

$$L = t_{Q_0}(W) = Q_0 + W$$

In effetti $Q_0 \in L$ dato che $Q_0 = Q_0 + 0_V \in Q_0 + W$.

Teorema Sia $L \subset V$ un sottospazio affine con giacitura $W \subset V$.
Allora L è uno spazio affine su W.

Dim $\exists\, Q_0 \in V$ t.c. $L = Q_0 + W$.

$\forall\, P, Q \in L \;\exists\, v, w \in W$ t.c. $P = Q_0 + v$, $Q = Q_0 + w \implies$

$\vec{PQ} = Q - P = w - v \in W \rightsquigarrow L \times L \to W,\; (P, Q) \mapsto \vec{PQ} = Q - P$

1) $\forall\, P = Q_0 + v \in L,\; v \in W,\; \forall\, w \in W \rightsquigarrow Q = P + w = Q_0 + \underbrace{v + w}_{\in W} \in L$

2) Chasles vale in $V \implies$ vale in $L \subset V$.

Quindi L è uno spazio affine su W.

$\mathbb{R}^n$ $L \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio affine con giacitura $W \subset \mathbb{R}^n$, $\dim L = l$.

$$W : AX = 0 \quad \text{con } A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), \quad m = n - l = \operatorname{codim} W$$

$Q_0 \in L \rightsquigarrow B = A Q_0$

$$L : AX = B.$$

Infatti le soluzioni di $AX = B$ formano un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ passante per $Q_0 \in L$ e di giacitura W.
Questo sottospazio affine è dunque L.

Teorema Ogni sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ (o più in generale di $\mathbb{K}^n$) è lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare compatibile e la sua giacitura è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Oss E' l'inverso del Teorema di struttura per sistemi lineari.

$$\{ L \subset \mathbb{R}^n \mid L \text{ sottosp. affine} \}$$

$$\left\{ X = C \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_\ell \end{pmatrix} + D \right\} \underset{\text{risoluzione}}{\overset{\text{eliminazione parametri}}{\rightleftarrows}} \{ S : AX = B \mid S \text{ compatibile} \}$$

equazioni parametriche di L — equazioni cartesiane di L

Se $L \subset \mathbb{R}^n$ è retta affine, cioè $\dim L = 1$, con giacitura W si chiama <u>vettore direzionale</u> di L un vettore <u>non nullo</u> $u \in W$
$\Rightarrow W = \operatorname{span}(u)$.

<u>Es</u> $L: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 4 \\ z = -t - 2 \end{cases}$ retta affine con vettore direzionale $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
e passante per $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$t = -z - 2$

$L: \begin{cases} x = -2z - 5 \\ y = -z + 2 \end{cases}$ $L: \begin{cases} x + 2z = -5 \\ y + z = 2 \end{cases}$ equazioni cartesiane di L.

<u>Def</u> Siano $L, T \subset \mathbb{R}^n$ sottospazi affini, L con giacitura W e T con giacitura $U \subset \mathbb{R}^n$. Diciamo che L e T sono:

i) <u>incidenti</u> se $L \cap T \neq \emptyset$

ii) <u>paralleli</u> se $W \subset U$ oppure $U \subset W$: $L \parallel T$.

iii) <u>sghembi</u> se L e T non sono paralleli e $L \cap T = \emptyset$.

$L : AX = B$ $\quad W : AX = 0$ $\quad L \cap T : \begin{cases} AX = B \\ CX = D \end{cases}$

$T : CX = D$ $\quad U : CX = 0$ $\quad W \cap U : \begin{cases} AX = 0 \\ CX = 0 \end{cases}$

Si osservi che $W \cap U \subset \mathbb{R}^n$ sottosp. vett.

Allora se $L \cap T \neq \emptyset \Rightarrow L \cap T$ sottospazio affine con giacitura $W \cap U$.

Def Un sottospazio affine H di $\mathbb{R}^n$ è detto iperpiano affine se

$$\dim H = n-1$$

cioè se H ha codimensione 1.

Gli iperpiani sono spazi delle soluzioni di una equazione cartesiana

$$H : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b$$

con $a_1, \dots, a_n$ non tutti nulli.

Gli iperpiani di $\mathbb{R}$ sono i punti ($\dim = 0$)
Gli iperpiani di $\mathbb{R}^2$ sono le rette affini
Gli iperpiani di $\mathbb{R}^3$ sono i piani affini.

$L : AX = B \rightsquigarrow H_i : A^{(i)} X = b_i$ iperpiano affine $\Rightarrow$
$L = H_1 \cap \dots \cap H_m$ se $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $m = n - \dim L = \operatorname{codim} L$
Pertanto ogni sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ di dimensione l è intersezione di $n-l$ iperpiani.

Posizioni reciproche di rette e piani

1) Due rette $r, r' \subset \mathbb{R}^2$

$r : ax + by + c = 0$; $W : ax + by = 0$

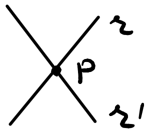
$r' : a'x + b'y + c' = 0$; $W' : a'x + b'y = 0$

$W = W' \Leftrightarrow rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$
$\Leftrightarrow r \parallel r'$

$rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow r = r'$

$rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$ e $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow r \cap r' = \emptyset$ e $r \parallel r'$
(parallele distinte)

$$rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \iff r \cap r' = \{P\}$$



2) Due piani $H, L \subset \mathbb{R}^3$

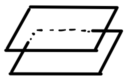
$H: ax + by + cz + d = 0$

$L: a'x + b'y + c'z + d' = 0$

2.1) $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1 \iff H \parallel L$ e $H = L \iff rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 1$

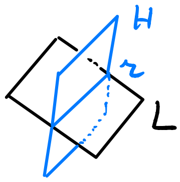
2.2) $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$ e $rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2 \iff H \parallel L$ e $H \cap L = \emptyset$

paralleli distinti



2.3) $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$ $\quad \dim(H \cap L) = 1$

piani incidenti in $r = H \cap L$ retta



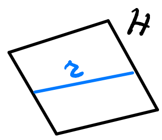
3) Piano e retta in $\mathbb{R}^3$

$H: ax + by + cz + d = 0$

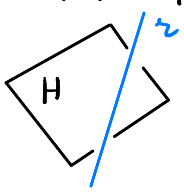
$$r: \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases} \quad \text{con } rg\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$$

3.1) $rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2 \iff r \parallel H$

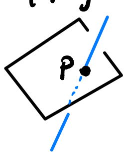
3.2) $r \subset H \iff rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 2$



3.3) $r \parallel H$ e $r \cap H = \emptyset \iff rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$ e $rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 3$



3.4) $r \cap H = \{P\} \iff rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 3$



incidenti in un punto P.

4) Due rette in $\mathbb{R}^3$

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} ex + fy + gz + h = 0 \\ e'x + f'y + g'z + h' = 0 \end{cases}$$

4.1) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix} = 2 \iff r \parallel s$

4.2) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix} = 2$ e $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix} = 3 \iff r \parallel s$ e $r \cap s = \phi$

parallele distinte

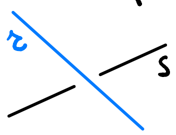
4.3) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix} = 3$ e $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix} = 3 \iff r \cap s = \{P\}$

incidenti in un punto

(Rouché–Capelli)

4.4) $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ e & f & g & h \\ e' & f' & g' & h' \end{pmatrix} = 4 \Rightarrow \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ e & f & g \\ e' & f' & g' \end{pmatrix} = 3 \iff r \not\parallel s$ e $r \cap s = \phi$

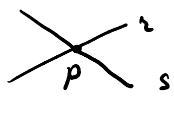
r e s <u>sghembe</u>



<u>OSS</u>. • $r \neq s$, $r \cap s \neq \phi \Rightarrow \exists!$ piano $H \subset \mathbb{R}^3$ t.c. $r \subset H$ e $s \subset H$

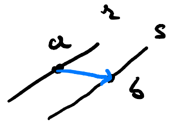
$p = r \cap s$, $u_r, u_s \in \mathbb{R}^3$ vettori direzionali di r e s

$H = p + \mathrm{span}(u_r, u_s)$



• $r \neq s$, $r \parallel s \Rightarrow \exists!$ piano $H \subset \mathbb{R}^3$ t.c. $r \subset H$ e $s \subset H$

$a \in r$, $b \in s$, $u_r \rightsquigarrow H = a + \mathrm{span}(u_r, b - a)$.



• r e s sghembe $\Rightarrow \exists!\, H_r, H_s \subset \mathbb{R}^3$ piani affini t.c.

$r \in H_r$, $s \in H_s$, $H_r \parallel H_s$

$u_r, u_s \in \mathbb{R}^3$ vettori di direzione di r e s rispettivamente

$a \in r$, $b \in s$, $W = \mathrm{span}(u_r, u_s) \rightsquigarrow H_r = a + W$, $H_s = b + W$.