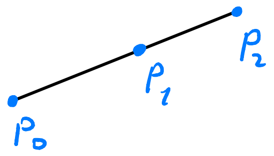
# Lezione 24 – Esempi

Punti allineati in $\mathbb{R}^n$: $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n$ allineati $\iff$

$P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ proporzionali $\iff$

$$\operatorname{rg}\left(\underbrace{P_1 - P_0 \quad P_2 - P_0}_{\text{vettori colonne o righe}}\right) = 1$$

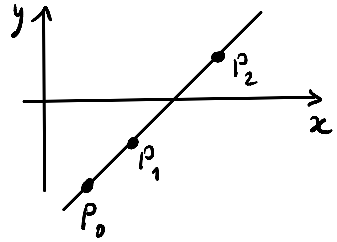



Più in generale $P_0, P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{R}^n$ sono allineati $\iff$

$$\operatorname{rg}\left(\underbrace{P_1 - P_0 \quad \ldots \quad P_k - P_0}_{\text{vettori colonne o righe}}\right) = 1$$

<u>Es</u> 1) $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$P_0, P_1, P_2$ allineati perché $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1$.



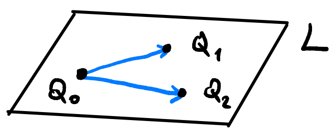

2) $Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$Q_1 - Q_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q_2 - Q_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow Q_0, Q_1, Q_2$ non allineati

Dati tre punti <u>non allineati</u> $Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^3$ per essi passa un solo piano $L$. Per scriverne l'equazione dobbiamo trovare una base della giacitura $W$:

$$W = \operatorname{span}\underbrace{\left(Q_1 - Q_0,\ Q_2 - Q_0\right)}_{\text{base}}$$




$\Rightarrow L: X = t_1(Q_1 - Q_0) + t_2(Q_2 - Q_0) + Q_0$ equazione vettoriale di $L$

Con i tre punti dell'esempio precedente si ha:

$$L: X = t_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow L: \begin{cases} x = -t_1 + 1 \\ y = 2t_1 + t_2 \\ z = 2t_1 + 3t_2 - 1 \end{cases}$$

L'equazione cartesiana si ottiene eliminando i parametri $t_1, t_2$ o anche osservando che $X \in L \Leftrightarrow X - Q_0 \in W \Leftrightarrow$

$$rg\begin{pmatrix} X-Q_0 & Q_1-Q_0 & Q_2-Q_0 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\det\begin{pmatrix} X-Q_0 & Q_1-Q_0 & Q_2-Q_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z+1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & 1 \\ z+1 & 3 \end{vmatrix} = 4(x-1) + 3y - z - 1$$

$L: 4x + 3y - z - 5 = 0$

## Nucleo e immagine

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$L_A(X) = AX$$

$\text{im}\, L_A = \text{span}(A_{(1)}, \dots, A_{(n)}) \rightsquigarrow$ estrazione della base

$\ker L_A = \{X \in \mathbb{R}^n \mid L_A(X) = 0_{\mathbb{R}^m}\} \rightsquigarrow$ sistema omogeneo $AX = 0_{\mathbb{R}^m}$

<u>Es</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \rightsquigarrow L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$rg\, L_A = rg\, A = 2$

$\text{im}\, L_A = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ base di $\text{im}\, L_A$

$\dim(\ker L_A) = 3 - 2 = 1$

$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{2}t \\ z = t \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ base di $\ker L_A$.