Corso di GEOMETRIA
Dipartimento di Ingegneria ed Architettura
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

7. Geometria affine

1 Spazi affini

Definizione 1. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Uno* **spazio affine** *su V è un insieme non vuoto $\mathbb{A}$, i cui elementi si dicono i punti di $\mathbb{A}$, ed una funzione*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A} \times \mathbb{A} & \to & V \\ (P, Q) & \mapsto & \overrightarrow{PQ}\,, \end{array}$$

tale che valgono i seguenti assiomi:

SA1: $\forall P \in \mathbb{A}$ e $\forall v \in V$, $\exists! Q \in \mathbb{A}$, tale che $v = \overrightarrow{PQ}$;

SA2: $\forall P, Q, R \in \mathbb{A}$, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Esempio 1. Sia $\mathbb{A}$ una retta, un piano, oppure lo spazio tridimensionale introdotti nel Capitolo 1. Ricordiamo che, dati due punti $P, Q \in \mathbb{A}$, il vettore applicato PQ è quel vettore con punto di applicazione P e punto finale Q, mentre il vettore geometrico $\overrightarrow{PQ}$ è la classe di equipollenza di PQ. Abbiamo visto che l'insieme V dei vettori geometrici è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$. Si osservi che $\mathbb{A}$ è uno spazio affine su V, la funzione $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$ associa ad ogni coppia di punti $(P, Q) \in \mathbb{A} \times \mathbb{A}$ il vettore geometrico $\overrightarrow{PQ}$.

Riportiamo di seguito le prime proprietà di uno spazio affine $\mathbb{A}$ che seguono direttamente dalla definizione.

Osservazione 1. 1. $\forall P \in \mathbb{A}$, $\overrightarrow{PP} = 0 \in V$.
Infatti, dall'assioma SA2 segue che

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}\,,$$

quindi, sommando ad ambo i membri di questa uguaglianza il vettore $-\overrightarrow{PP}$, si ottiene il risultato.
2. $\forall P, Q \in \mathbb{A}$, $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.
Per dimostrare questa uguaglianza, si osservi che, dall'assioma SA2, si ha:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP}\,,$$

e dal punto precedente, $\overrightarrow{PP} = 0$, quindi $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = 0$, in altre parole $\overrightarrow{QP}$ è il vettore opposto di $\overrightarrow{PQ}$.

Definizione 2. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V. La* **dimensione** *di $\mathbb{A}$ si definisce come la dimensione di V,* $\dim(\mathbb{A}) := \dim(V)$.

Una **retta affine** *è uno spazio affine di dimensione* 1. *Un* **piano affine** *è uno spazio affine di dimensione* 2.

Esempio 2. 1. La retta ed il piano introdotti nel Capitolo 1 sono esempi di retta affine, rispettivamente di piano affine.

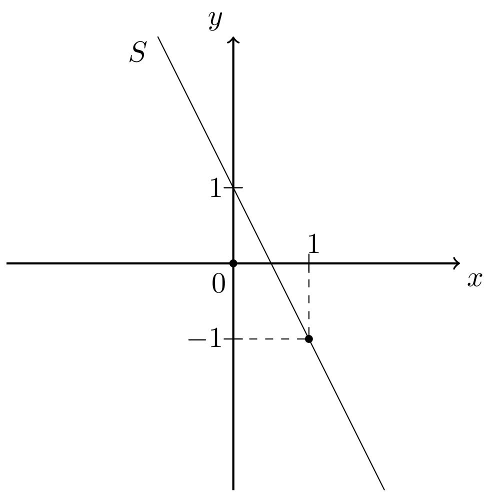
2. Sia V uno spazio vettoriale su K. Possiamo definire su V una struttura di spazio affine, con spazio vettoriale associato V stesso, nel modo seguente: per ogni $u, v \in V$, definiamo $\overrightarrow{uv} := v - u \in V$.

Verifichiamo la validità degli assiomi SA1, SA2.
<u>SA1:</u> siano $u, v \in V$, allora $\overrightarrow{uw} = v \Leftrightarrow w - u = v \Leftrightarrow w = v + u$.
<u>SA2:</u> siano $u, v, w \in V$, allora $\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = v - u + w - v = w - u = \overrightarrow{uw}$.

3. Se $V = \mathbb{R}^n$, nel precedente esempio, lo spazio affine che si ottiene si denota anche con il simbolo $\mathbb{A}^n(\mathbb{R})$. In questo caso $\dim(\mathbb{A}^n(\mathbb{R})) = n$.

Più in generale, se $V = K^n$, si ottiene lo spazio affine $\mathbb{A}^n(K)$ di dimensione $\dim(\mathbb{A}^n(K)) = n$.

4. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, consideriamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare $2x+y = 1$, $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \,|\, 2x + y = 1 \right\}$. Notiamo che i punti di S giacciono sulla retta del piano passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + y = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$, il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ delle soluzioni dell'equazione omogenea $2x + y = 0$, associata all'equazione $2x + y = 1$ di S. Allora S ha una struttura di spazio affine su V definita come segue: $\forall P =$

$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} \in S$, poniamo

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} s' - s \\ t' - t \end{pmatrix} \in V\,.$$

In seguito vedremo che, più in generale, l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari, se $\neq \emptyset$, ha una struttura di spazio affine sullo spazio vettoriale formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

Definizione 3. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V. Un* **riferimento affine** *per $\mathbb{A}$ è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V. Il punto O è detto l'***origine** *del riferimento.*

Sia $O, \{v_1, \ldots, v_n\}$ un riferimento affine di $\mathbb{A}$. Per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, le **coordinate affini di** *P rispetto al riferimento fissato, si definiscono come le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP} \in V$ rispetto alla base $\{v_1, \ldots, v_n\}$. In particolare, se $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, allora $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ sono le coordinate di P rispetto ad $O, v_1, \ldots, v_n$. Useremo frequentemente la notazione vettoriale $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$ per indicare le coordinate di P.*

In seguito, un riferimento affine verrà anche chiamato **sistema di coordinate affini***, in relazione al fatto che un riferimento affine permette di assegnare ad ogni punto le sue coordinate affini.*

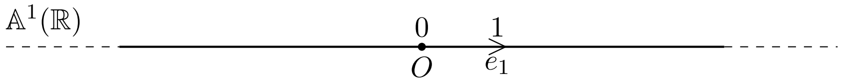
Osservazione 2. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V, e sia $O \in \mathbb{A}$. Per l'assioma SA1, la funzione

$$\mathbb{A} \to V\,, \quad P \mapsto \overrightarrow{OP}$$

è biettiva. Quindi, se $O, v_1, \ldots, v_n$ è un riferimento affine di $\mathbb{A}$, la funzione $\mathbb{A} \to K^n$ che associa ad ogni punto $P \in \mathbb{A}$ le sue coordinate rispetto al riferimento $O, v_1, \ldots, v_n$ è una biezione.

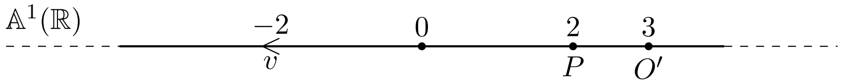
Esempio 3. 1. Se $\mathbb{A}$ è una retta affine su uno spazio vettoriale V, un riferimento affine per $\mathbb{A}$ è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ ed un vettore non nullo $v \in V$. Per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, $\overrightarrow{OP} = \lambda v$, con $\lambda \in K$. Allora P ha coordinata affine λ rispetto al riferimento O, v.

Ad esempio, un riferimento affine di $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ è dato dal punto $O = 0 \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e dal vettore $e_1 = 1 \in \mathbb{R}$ della base canonica di $\mathbb{R}$:



Il riferimento affine $O = 0, e_1$ di $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ si chiama riferimento affine canonico. Sia $P \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$. Ricordiamo che $\mathbb{A}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, come insieme, quindi P è un numero reale $a \in \mathbb{R}$. Allora $\overrightarrow{OP} = P - O = a - 0 = a = ae_1$, quindi la coordinata di P rispetto al riferimento canonico è a.

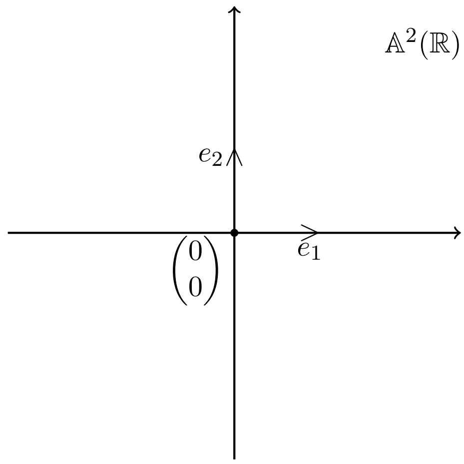
Scegliendo altri punti $O' \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ e vettori non nulli $v \in \mathbb{R}$, si ottengono altri riferimenti affini, ad esempio $O' = 3, v = -2$ è un riferimento affine di $\mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ diverso da quello canonico.



Sia $P \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ il punto corrispondente al numero reale 2. Allora $\overrightarrow{O'P} = 2 - 3 = -1 = \frac{1}{2}v$, quindi P ha coordinata $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ rispetto al riferimento O', v, mentre la sua coordinata rispetto al riferimento canonico è 2.

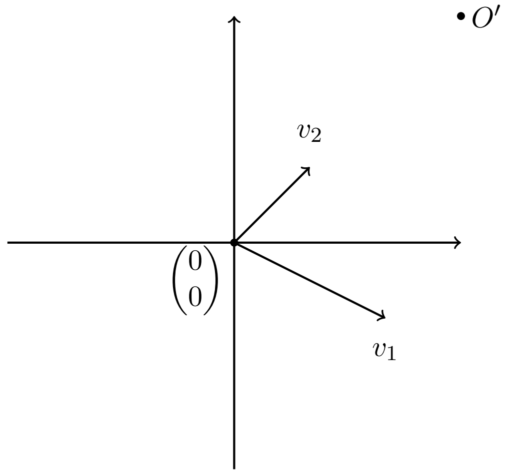
2. Se $\mathbb{A}$ è un piano affine su uno spazio vettoriale V, un riferimento affine per $\mathbb{A}$ è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e due vettori $v_1, v_2 \in V$ linearmente indipendenti. Per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, $\overrightarrow{OP} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, quindi P ha coordinate affini $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \in K^2$ rispetto al riferimento O, v_1, v_2.

Ad esempio, se $\mathbb{A} = \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, un riferimento affine è dato dal punto $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e dai vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ della base canonica di $\mathbb{R}^2$:



Il riferimento affine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1, e_2$ si chiama riferimento affine canonico. Sia $P \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Per definizione $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ come insieme, quindi $P = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{OP} = P - O = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = ae_1 + be_2$, quindi P ha coordinate $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ rispetto ad O, e_1, e_2.

Consideriamo ora un altro riferimento affine O', v_1, v_2 di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, con $O' = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Per ogni $P = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$,

$$\overrightarrow{O'P} = P - O' = \begin{pmatrix}a-3\\b-3\end{pmatrix} = \frac{a-b}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \frac{a+2b-9}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{a-b}{3}v_1 + \frac{a+2b-9}{3}v_2\,,$$

quindi le coordinate di $P = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ rispetto al riferimento O', v_1, v_2 sono $\begin{pmatrix}\frac{a-b}{3}\\ \frac{a+2b-9}{3}\end{pmatrix}$.

3. Sia K un campo, e sia $n \geq 1$ un intero. Il **riferimento canonico** di $\mathbb{A}^n(K)$ è il riferimento affine $O, e_1, \ldots, e_n$, dove $O = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \in K^n$ è il vettore nullo, ed $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di K^n. Osserviamo che, per ogni punto $P = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathbb{A}^n(K)$, le coordinate di P rispetto al riferimento canonico sono $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \in K^n$.

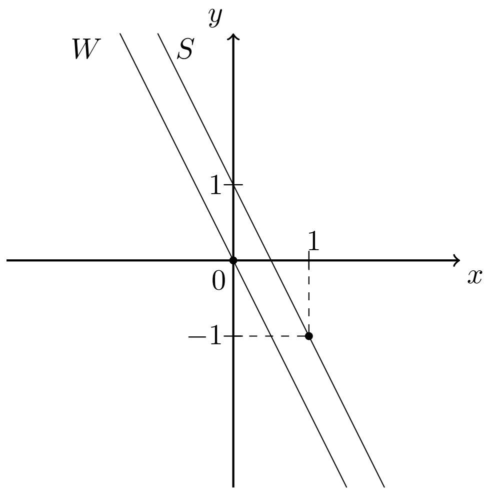
2 Sottospazi affini, equazioni Cartesiane e parametriche

Definizione 4. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V. Dati un punto $Q \in \mathbb{A}$ ed un sottospazio vettoriale W di V, il* **sottospazio affine** *di $\mathbb{A}$ passante per Q e parallelo a W è il sottoinsieme di $\mathbb{A}$*

$$S := \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} \in W\}\,.$$

Il sottospazio $W \subseteq V$ si chiama la **giacitura** *di S.*

Esempio 4. 1. Il sottoinsieme $S \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ dell'Esempio 2. 4. è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. La sua giacitura W è il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ formato dalle soluzioni dell'equazione $2x + y = 0$.



Per ogni $Q \in S$ (ad esempio $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$), S è il sottospazio affine di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ passante per Q parallelo a W.

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V, e sia $S \subseteq \mathbb{A}$ il sottospazio affine passante per $Q \in \mathbb{A}$ e parallelo a $W \subseteq V$. Le seguenti proprietà di S seguono direttamente dalla definizione.

Osservazione 3. 1. $Q \in S$, in particolare $S \neq \emptyset$.
Infatti, $\overrightarrow{QQ} = 0 \in V$, e siccome $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, il vettore nullo di V appartiene anche a W.

2. $\forall P_1, P_2 \in S$, $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$.
Infatti, per l'assioma SA2, $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1Q} + \overrightarrow{QP_2}$. Inoltre ricordiamo che $\overrightarrow{P_1Q} = -\overrightarrow{QP_1}$, quindi $\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{QP_1} + \overrightarrow{QP_2}$. Siccome $\overrightarrow{QP_1}, \overrightarrow{QP_2} \in W$, segue che $\overrightarrow{P_1P_2} \in W$.

3. Dai punti precedenti segue che S ha una struttura di spazio affine sullo spazio vettoriale W. Infatti $S \neq \emptyset$ per il punto 1, e la restrizione della funzione $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V$, $(P_1, P_2) \mapsto \overrightarrow{P_1P_2}$, ad S è una funzione $S \times S \to W$, $(P_1, P_2) \mapsto \overrightarrow{P_1P_2}$, che verifica gli assiomi SA1, SA2 della Definizione 1.

Definizione 5. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V. Sia $S \subseteq \mathbb{A}$ un sottospazio affine di giacitura W. Diremo che S è un* **iperpiano**, *se* $\dim(S) = \dim(\mathbb{A}) - 1$, *dove* $\dim(S) = \dim(W)$.

Vediamo ora due modi per descrivere i sottospazi affini, cioè tramite equazioni Cartesiane ed equazioni parametriche.

Teorema 1. *Sia $A \cdot x = b$ un sistema di m equazioni lineari di ordine n a coefficienti nel campo K. Se $A \cdot x = b$ è compatibile, allora l'insieme delle sue soluzioni*

$$S = \{s \in K^n \mid A \cdot s = b\}$$

è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n(K)$ la cui giacitura è il sottospazio vettoriale W di K^n formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato, $W = \{s \in K^n \mid A \cdot s = 0\}$. In tal caso, $\dim(S) = n - \mathrm{rg}(A)$, e per ogni $Q \in S$, S coincide con il sottospazio affine di $\mathbb{A}^n(K)$ passante per Q e parallelo a W.

Dim. Poichè il sistema lineare è compatibile, $S \neq \emptyset$. Sia dunque $\tilde{s}$ una sua soluzione. Per il teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare,

$$S = W + \tilde{s}\,.$$

Quindi, posto $Q = \tilde{s}$, un punto $P \in \mathbb{A}^n(K)$ appartiene ad S, se e solo se $P - Q \in W$. Il teorema segue ora dalla Definizione 4 e dal fatto che, in $\mathbb{A}^n(K)$, $\overrightarrow{QP} = P - Q$.

Per definizione, $\dim(S) = \dim(W)$, e per il teorema di Rouché-Capelli, $\dim(W) = n - \mathrm{rg}(A)$. □

Definizione 6. *Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un sottospazio affine. Un sistema di* **equazioni Cartesiane** *per S è un qualunque sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$ tale che $S = \{s \in \mathbb{A}^n(K) \mid A \cdot s = b\}$.*

Osservazione 4. 1. Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni Cartesiane. Infatti, se $S = \{s \in \mathbb{A}^n(K) \mid A \cdot s = b\}$, allora per ogni sistema di equazioni lineari $A' \cdot x = b'$ equivalente ad $A \cdot x = b$, le equazioni di $A' \cdot x = b'$ sono delle equazioni Cartesiane di S.

2. Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni Cartesiane per il sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n(K)$. Allora, il vettore nullo di K^n appartiene ad S se e solo se $b = 0$, cioè se e solo se il sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$ è omogeneo.

3. Ogni iperpiano di $\mathbb{A}^n(K)$ può essere descritto da una equazione lineare,

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b\,,$$

con $a_1, \ldots, a_n \in K$ non tutti nulli. Infatti, se $A \cdot x = b$ è un sistema di equazioni Cartesiane per S, abbiamo che $\dim(S) = n - 1 = n - \mathrm{rg}(A)$. Da questo segue che $\mathrm{rg}(A) = 1$. Siccome il sistema lineare $A \cdot x = b$ è compatibile, $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A) = 1$. Sia $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ un sistema lineare equivalente ad $A \cdot x = b$ con matrice dei coefficienti $\tilde{A}$ a scala. Siccome $\mathrm{rg}(\tilde{A}|\tilde{b}) = \mathrm{rg}(A|b) = 1$, $(\tilde{A}|\tilde{b})$ ha un'unica riga $\neq 0$, quindi $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ è un sistema di equazioni lineari con un'unica equazione diversa dall'equazione $0 = 0$.

Vediamo ora come si possono descrivere i sottospazi affini tramite equazioni parametriche. Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ il sottospazio affine passante per il punto $Q \in \mathbb{A}^n(K)$ e parallelo a $W \subseteq K^n$. Supponiamo che $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$, e siano

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \dots, w_m = \begin{pmatrix} w_{1m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix} \in K^n$$

dei generatori di W. Allora

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in S \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{QP} = P - Q = \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} \in W\,,$$

cioè $\Leftrightarrow \exists t_1, \dots, t_m \in K$, tali che

$$\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 w_1 + \dots + t_m w_m\,,$$

se e soltanto se $\exists t_1, \dots, t_m \in K$, tale che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_m w_{1m} \\ \vdots \\ q_n + t_1 w_{n1} + \dots + t_m w_{nm} \end{pmatrix}.$$

Definizione 7. *Usando le stesse notazioni di cui sopra, le equazioni*

$$\begin{cases} x_1 &= q_1 + t_1 w_{11} + \dots + t_m w_{1m} \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_n &= q_n + t_1 w_{n1} + \dots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

sono delle **equazioni parametriche** *per S.*

Osservazione 5. Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni parametriche.

Esempio 5. 1. Sia $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \,|\, x + 2y = 5 \right\}$. Osserviamo che $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S$, e che la giacitura di S è $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \,|\, x + 2y = 0 \right\} =$

$\mathrm{Span}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$. Quindi S ha equazioni parametriche

$$S : \begin{cases} x &= 1 - 2t \\ y &= 2 + t \end{cases}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$.

2. Sia $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\-5\\6\\1\end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^4$, e sia $Q = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$.
Allora il sottospazio affine $S \subset \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ passante per Q ed avente giacitura W ha equazioni parametriche

$$S : \begin{cases} x_1 &= 1 + t_1 - 2t_2 + 8t_3 \\ x_2 &= -t_1 + t_2 - 5t_3 \\ x_3 &= 1 + 3t_1 + 6t_3 \\ x_4 &= 2t_1 + t_2 + t_3 \end{cases}$$

con $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$. Osserviamo che

$$\dim(S) = \dim(W) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -2 & 8\\ -1 & 1 & -5\\ 3 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} = 2\,.$$

Quindi S è un piano affine in $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$. Inoltre, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, quindi S ha anche le seguenti equazioni parametriche:

$$S : \begin{cases} x_1 &= 1 + t_1 - 2t_2 \\ x_2 &= -t_1 + t_2 \\ x_3 &= 1 + 3t_1 \\ x_4 &= 2t_1 + t_2 \end{cases}$$

con $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Definizione 8. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V. Siano $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{A}$ due sottospazi affini di giacitura $W_1, W_2 \subseteq V$, rispettivamente.*

1) *S_1 ed S_2 si dicono* **paralleli**, *in simboli $S_1 || S_2$, se $W_1 \subseteq W_2$, oppure se $W_2 \subseteq W_1$.*

2) *Se S_1 ed S_2 non sono paralleli, essi si dicono* **sghembi** *se $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, oppure* **incidenti** *se $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.*

2.1 Passaggio da equazioni Cartesiane ad equazioni parametriche

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un sottospazio affine dato dalle equazioni Cartesiane $A \cdot x = b$. Per trovare delle equazioni parametriche per S si risolve il sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$, esprimendo le sue soluzioni in funzione di opportune variabili libere $t_1, \ldots, t_m \in K$. In altre parole bisogna trovare una soluzione particolare Q di $A \cdot x = b$ ed una base $w_1, \ldots, w_m$ dello spazio W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot x = 0$ in modo che

$$S = Q + W = Q + t_1 w_1 + \ldots + t_m w_m \,,$$

al variare di $t_1, \ldots, t_m \in K$.

Esempio 6. Sia $S \subset \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ il sottospazio affine dato dalle seguenti equazioni Cartesiane:

$$S : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 & = 0 \\ -3x_3 + 2x_4 & = 1 \,. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema lineare, otteniamo le seguenti equazioni parametriche per S.

$$S : \begin{cases} x_1 & = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} t_2 - \frac{11}{6} t_4 \\ x_2 & = t_2 \\ x_3 & = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} t_4 \\ x_4 & = t_4 \,. \end{cases}$$

2.2 Passaggio da equazioni parametriche ad equazioni Cartesiane

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ un sottospazio affine dato dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 & = q_1 + t_1 w_{11} + \ldots + t_m w_{1m} \\ \vdots & \quad \vdots \\ x_n & = q_n + t_1 w_{n1} + \ldots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

al variare di $t_1, \ldots, t_m \in K$. Quindi S è il sottospazio di $\mathbb{A}^n(K)$ passante per $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ ed avente giacitura $W = \operatorname{Span}\left(w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, w_m = \begin{pmatrix} w_{1m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix} \right)$.

Osserviamo che un punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^n(K)$ appartiene ad S se e solo se il seguente sistema lineare

$$\underbrace{\begin{pmatrix} w_{11} & \ldots & w_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \ldots & w_{nm} \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix}}_{b}$$

nelle indeterminate $\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}$ è compatibile. Dai risultati del Capitolo 3, questo è equivalente all'annullamento delle ultime $n-r$ componenti del vettore $\tilde{b}$, dove $(\tilde{A}\,|\,\tilde{b})$ è una matrice che si ottiene da $(A\,|\,b)$ tramite una sequenza di operazioni elementari ed $\tilde{A}$ è a scala, $r = \mathrm{rg}(A) = \dim(S)$. Quindi, se $\tilde{b} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}$, allora delle equazioni Cartesiane per S sono date da

$$\begin{cases} \tilde{b}_{r+1} & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{b}_n & = 0\,. \end{cases}$$

Esempio 7. Sia $S \subset \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ il sottospazio affine dell'Esempio 5. 2.,

$$S : \begin{cases} x_1 & = 1 + t_1 - 2t_2 + 8t_3 \\ x_2 & = -t_1 + t_2 - 5t_3 \\ x_3 & = 1 + 3t_1 + 6t_3 \\ x_4 & = 2t_1 + t_2 + t_3\,. \end{cases}$$

Allora

$$(A\,|\,b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & x_1 - 1 \\ -1 & 1 & -5 & x_2 \\ 3 & 0 & 6 & x_3 - 1 \\ 2 & 1 & 1 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Trasformiamo $(A\,|\,b)$ per mezzo di una successione di operazioni elementari in modo da ottenere

$$(\tilde{A}\,|\,\tilde{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & x_1 - 1 \\ 0 & -1 & 3 & x_1 + x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_1 + 5x_2 + x_4 - 3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che $\tilde{A}$ è a scala ed otteniamo le seguenti equazioni Cartesiane per S:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 & = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 & = 3\,. \end{cases}$$

3 Geometria in un piano affine

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 su un campo K. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V, quindi $\mathbb{A}$ è un piano affine. I sottospazi affini di $\mathbb{A}$ sono quelli banali, cioè i punti ed $\mathbb{A}$ stesso, e le rette $r \subset \mathbb{A}$.

Fissato un riferimento affine O, v_1, v_2 per $\mathbb{A}$ identifichiamo $\mathbb{A}$ con $\mathbb{A}^2(K)$ nel modo seguente: per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, siano $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2$ le sue coordinate rispetto al riferimento O, v_1, v_2, allora identifichiamo P con il punto di $\mathbb{A}^2(K)$ che ha coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ rispetto al riferimento affine canonico $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_1, e_2$ di $\mathbb{A}^2(K)$. Osserviamo che, se $P, Q \in \mathbb{A}$ sono due punti aventi coordinate rispettivamente $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ rispetto al riferimento O, v_1, v_2, allora il vettore $\overrightarrow{PQ} \in V$ ha coordinate $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\{v_1, v_2\}$. Quindi, relativamente alla precedente identificazione di $\mathbb{A}$ con $\mathbb{A}^2(K)$, il vettore $\overrightarrow{PQ} \in V$ corrisponde al vettore $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in K^2$. Da questo segue che, studiere la geometria affine in $\mathbb{A}$, è equivalente a studiare quella in $\mathbb{A}^2(K)$.

Se $Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(K)$ e $W = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \subset K^2$ ha $\dim(W) = 1$, allora la retta r passante per Q di giacitura W ha equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x &= x_0 + t\lambda \\ y &= y_0 + t\mu \,, \end{cases}$$

al variare di $t \in K$. Delle equazioni Cartesiane per r si possono ottenere nel modo seguente. Ricordiamo che, per definizione, un punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(K)$ appartiene ad r se e solo se $\overrightarrow{QP} \in W$, cioè se e solo se i vettori $P - Q = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in K^2$ sono linearmente dipendenti. Ricordiamo che un modo per esprimere quest'ultima condizione è richiedere che

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & \lambda \\ y - y_0 & \mu \end{pmatrix} = (x - x_0)\mu - (y - y_0)\lambda = 0 \,.$$

Quindi delle equazioni Cartesiane per r sono:

$$x\mu - y\lambda = x_0\mu - y_0\lambda \,.$$

Esempio 8. Sia $K = \mathbb{R}$, e siano $Q = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$. Allora la retta r passante per Q ed avente giacitura W ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= -2 + t \\ y &= 1 + 3t \,, \end{cases}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$, ed equazioni Cartesiane

$$3x - y = -7 \,.$$

Siano $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ due punti distinti di $\mathbb{A}^2(K)$. Il vettore $\overrightarrow{QP} = P - Q = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \in K^2$ è diverso dal vettore nullo, quindi genera un sottospazio vettoriale di dimensione 1 di K^2, $W = \text{Span} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$. La retta passante per P e Q è la retta $r \subset \mathbb{A}^2(K)$ passante per Q ed avente giacitura W. Osserviamo che r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y &= y_0 + t(y_1 - y_0)\,, \end{cases}$$

con $t \in K$, ed equazioni cartesiane

$$(x - x_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(x_1 - x_0) = 0\,.$$

Proposizione 1. *Siano $r, r' \subset \mathbb{A}^2(K)$ due rette di equazioni Cartesiane*

$$\begin{aligned} ax + by &= c\,, \\ a'x + b'y &= c'\,, \end{aligned}$$

rispettivamente. Allora valgono le seguenti affermazioni.

1) $r || r' \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = ab' - a'b = 0.$

2) Se $r || r'$ allora $r \cap r' = \emptyset$, cioè r ed r' sono disgiunte se e solo se

$$\text{rg} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2\,.$$

3) Se r ed r' non sono parallele allora esse si incontrano in un unico punto di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - a'b}\,, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\,.$$

Dim. 1) Siano W, W' le giaciture di r, r', rispettivamente. Ricordiamo che $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2 \,|\, ax + by = 0 \right\}$ e $W' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in K^2 \,|\, a'x + b'y = 0 \right\}$. Siccome $\dim(W) = \dim(W') = 1$,

$$r || r' \Leftrightarrow W = W' \Leftrightarrow \dim(W \cap W') = 1\,.$$

Poiché $W \cap W'$ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax + by &= 0 \\ a'x + b'y &= 0\,, \end{cases}$$

l'enunciato segue dal teorema di Rouché-Capelli, osservando che rg $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \geq 1$, perché la matrice non è nulla.

2) Questa affermazione segue direttamente dal teorema di Rouché-Capelli.

3) Per il punto 1) r ed r' non sono parallele se e solo se det $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \neq 0$. In tal caso il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{cases}$$

ha un'unica soluzione. L'espressione esplicita di tale soluzione è data dalla regola di Cramer. □

Esempio 9. Consideriamo le rette $r : x + 3y = -1$, ed $r' : 2x + y = 2$ di $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Osserviamo che det $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -5 \neq 0$, quindi r ed r' non sono parallele. Dalla proposizione precedente, r ed r' si incontrano nel punto $\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Sia $Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(K)$ e siano $r : ax + by = c$, $r' : a'x + b'y = c'$ due rette distinte di $\mathbb{A}^2(K)$ passanti per Q. Allora, per ogni $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, la retta

$$R_{(\lambda,\mu)} : \lambda(ax + by - c) + \mu(a'x + b'y - c') = 0$$

contiene il punto Q. Viceversa, ogni altra retta per Q coincide con $R_{(\lambda,\mu)}$, per qualche $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Infatti, sia $r'' : a''x + b''y = c''$ una retta passante per Q. Scegliamo un punto $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in r''$ diverso da Q. Siccome $r \neq r'$, vale una delle seguenti disuguaglianze:

$$ax_1 + by_1 - c \neq 0\,, \quad a'x_1 + b'y_1 - c' \neq 0\,.$$

Quindi, per $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = (a'x_1 + b'y_1 - c', -ax_1 - by_1 + c)$ si ha che $P \in R_{(\tilde{\lambda},\tilde{\mu})}$. Per l'unicità della retta passante per P e Q, segue che $r'' = R_{(\tilde{\lambda},\tilde{\mu})}$.

Definizione 9. *Con le notazioni di cui sopra, l'insieme delle rette $R_{(\lambda,\mu)}$, al variare di $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, si chiama* **fascio proprio di rette per** Q.

Esempio 10. Sia $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$. Vogliamo determinare il fascio proprio di rette per Q, $R_{(\lambda,\mu)}$. Osserviamo che $r : x = 1$ ed $r' : y = 2$ sono due rette distinte passanti per Q. Quindi $R_{(\lambda,\mu)} : \lambda(x - 1) + \mu(y - 2) = 0$.

Vediamo con un esempio un'applicazione del fascio proprio di rette per un punto.

Esempio 11. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, vogliamo trovare un'equazione della retta r parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passante per $r' \cap r''$, dove $r' : x - 2y = 0$, $r'' : 3x + 2y = 1$.

A tale scopo, osserviamo che r appartiene al fascio proprio di rette passanti per $r' \cap r''$, che è dato dalla seguente espressione (osserviamo che $r' \neq r''$):

$$R_{(\lambda,\mu)} : \lambda(x - 2y) + \mu(3x + 2y - 1) = 0 \, , \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \, .$$

Per ogni (λ, μ), la giacitura di $R_{(\lambda,\mu)}$ è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\lambda(x - 2y) + \mu(3x + 2y) = 0$, quindi la retta $R_{(\lambda,\mu)}$ è parallela a v se e solo se $-3\lambda - \mu = 0$. Per $\lambda = 1$, $\mu = -3$, otteniamo $r = R_{(1,-3)} = 8x + 8y = 3$. Osserviamo che la coppia (λ, μ) è definita univocamente, a meno di un fattore moltiplicativo $\neq 0$.

4 Geometria in uno spazio affine di dimensione 3

Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dimensione 3. I sottospazi affini di $\mathbb{A}$ sono quelli banali, cioè i punti ed $\mathbb{A}$ stesso, le rette, i piani. Fissato un riferimento affine O, v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{A}$, identifichiamo $\mathbb{A}$ con $\mathbb{A}^3(K)$ in modo analogo a come fatto nella sezione precedente per i piani affini. Anche in questo caso lo studio della geometria affine di $\mathbb{A}$ è equivalente a quello della geometria affine di $\mathbb{A}^3(K)$.

Descriviamo dapprima i piani affini in $\mathbb{A}^3(K)$. Dati un punto $Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3(K)$ ed un sottospazio vettoriale $W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \right) \subset K^3$ di dimensione 2, il piano p passante per Q ed avente giacitura W ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= x_0 + t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2 \\ y &= y_0 + t_1\mu_1 + t_2\mu_2 \\ z &= z_0 + t_1\nu_1 + t_2\nu_2 \, , \end{cases}$$

con $t_1, t_2 \in K$. Per ottenere un'equazione Cartesiana di p ricordiamo che, per definizione, il punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3(K)$ appartiene a p se e solo se $\overrightarrow{QP} \in W$, cioè i vettori $P - Q = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \nu_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti. Un altro modo di esprimere questa condizione è richiedere che

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ y - y_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ z - z_0 & \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix} = 0 \, .$$

Sviluppando tale determinante lungo la prima colonna si ottiene un'equazione Cartesiana per p:

$$(x-x_0)(\mu_1\nu_2-\nu_1\mu_2)-(y-y_0)(\lambda_1\nu_2-\nu_1\lambda_2)+(z-z_0)(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)=0\,.$$

Il maniera analoga si ottengono equazioni parametriche e Cartesiane del piano p passante per 3 punti non allineati $P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{A}^3(K)$. Ricordiamo che P_0, P_1, P_2 non sono allineati se non esiste alcuna retta di $\mathbb{A}^3(K)$ che li contiene, in altre parole, se e solo se i vettori $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}$ sono linearmente indipendenti. In tal caso, se $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, e $P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, allora p ha le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x &= x_0 + t_1(x_1-x_0) + t_2(x_2-x_0) \\ y &= y_0 + t_1(y_1-y_0) + t_2(y_2-y_0) \\ z &= z_0 + t_1(z_1-z_0) + t_2(z_2-z_0)\,, \end{cases}$$

con $t_1, t_2 \in K$. Un'equazione Cartesiana per p è data da

$$\det\begin{pmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Esempio 12. 1. Siano $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Osserviamo che $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti, quindi P_0, P_1, P_2 non sono allineati. Allora il piano passante per questi punti ha equazione Cartesiana

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix} = (x-1)+2(y-2)+3z = 0\,.$$

2. Sia $p \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ il piano dato dall'equazione Cartesiana $2x - y - z = 3$. Vogliamo trovare equazioni parametriche per p. Allora, ponendo come variabili libere $t_1 = y$, $t_2 = z$, si ha che $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2$, quindi otteniamo le seguenti equazioni parametriche per p:

$$\begin{cases} x &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 \\ y &= t_1 \\ z &= t_2\,. \end{cases}$$

Descriviamo ora le rette in $\mathbb{A}^3(K)$. Sia $Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ un punto di $\mathbb{A}^3(K)$, e sia $W = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} \subset K^3$ un sottospazio vettoriale di dimensione 1. La retta $r \subset \mathbb{A}^3(K)$ passante per Q ed avente giacitura W ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= x_0 + t\lambda \\ y &= y_0 + t\mu \\ z &= z_0 + t\nu\,, \end{cases}$$

con $t \in K$. Per determinare delle equazioni Cartesiane per r procediamo come descritto nella sezione 2.2. In particolare, un punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3(K)$ appartiene ad r, se e solo se il seguente sistema di equazioni lineari nell'indeterminata t è compatibile:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}}_{A} \cdot t = \underbrace{\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}}_{b}.$$

Con una successione di operazioni elementari, trasformiamo $(A \,|\, b)$ in una matrice $(\tilde{A} \,|\, \tilde{b})$ con $\tilde{A}$ a scala. Siccome $\operatorname{rg}(\tilde{A}) = \operatorname{rg}(A) = 1$, le equazioni Cartesiane di r sono

$$\begin{cases} \tilde{b}_2 &= 0 \\ \tilde{b}_3 &= 0\,. \end{cases}$$

Ad esempio, se $\lambda \neq 0$, allora

$$(\tilde{A} \,|\, \tilde{b}) = \begin{pmatrix} \lambda & x - x_0 \\ 0 & y - y_0 - \frac{\mu}{\lambda}(x - x_0) \\ 0 & z - z_0 - \frac{\nu}{\lambda}(x - x_0) \end{pmatrix},$$

quindi r ha equazioni Cartesiane

$$\begin{cases} \lambda(y - y_0) - \mu(x - x_0) &= 0 \\ \lambda(z - z_0) - \nu(x - x_0) &= 0\,. \end{cases}$$

In maniera analoga si determinano equazioni Cartesiane per r nei casi in cui $\mu \neq 0$, oppure $\nu \neq 0$.

Se $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ sono due punti distinti di $\mathbb{A}^3(K)$, allora esiste un'unica retta r passante per P e Q. Per ottenere equazioni parametriche e

Cartesiane si osserva che r è la retta passante per Q ed avente giacitura $W = \mathrm{Span}(\overrightarrow{QP}) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$, allora i precedenti risultati forniscono equazioni parametriche e Cartesiane per r.

Osserviamo che, in generale, una retta affine $r \subset \mathbb{A}^3(K)$ può essere descritta da due equazioni Cartesiane

$$\begin{cases} ax + by + cz & = d \\ a'x + b'y + c'z & = d'\,, \end{cases}$$

con $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$. Notiamo che da questa condizione segue l'uguaglianza $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$, quindi il sistema lineare è compatibile. Geometricamente questo significa che r è l'intersezione dei piani p, p' di equazioni Cartesiane $p : ax + by + cz = d$ e $p' : a'x + b'y + c'z = d'$. La condizione $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$ esprime il fatto che p e p' non sono paralleli (si veda la seguente proposizione).

Proposizione 2. *Siano $p, p' \subset \mathbb{A}^3(K)$ due piani affini di equazioni Cartesiane $p : ax + by + cz = d$ e $p' : a'x + b'y + c'z = d'$. Allora valgono le seguenti affermazioni.*

1) $p || p' \Leftrightarrow \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$.

2) Se $p||p'$, allora p e p' sono disgiunti se e solo se $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$, altrimenti $p = p'$.

3) Se p e p' non sono paralleli, allora essi sono incidenti, e $p \cap p'$ è una retta.

Dim. 1) Siano W, W' la giacitura di p, p', rispettivamente. Ricordiamo che $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid ax + by + cz = 0 \right\}$, e $W' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid a'x + b'y + c'z = 0 \right\}$. Siccome $\dim(W) = \dim(W') = 2$,

$$p || p' \Leftrightarrow W = W' \Leftrightarrow \dim(W \cap W') = 2\,.$$

Il risultato segue ora dal Teorema di Rouché-Capelli, osservando che $W \cap W'$ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax + by + cz & = 0 \\ a'x + b'y + c'z & = 0\,. \end{cases}$$

2) Dire che p e p' sono disgiunti significa che $p \cap p' = \emptyset$, in altre parole che il seguente sistema lineare non è compatibile:

$$\begin{cases} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \, . \end{cases}$$

Per ipotesi, $p || p'$, quindi dal punto 1) abbiamo che $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$. Siccome $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \le \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} \le 2$, per il Teorema di Rouché-Capelli il sistema lineare di cui sopra non è compatibile se e solo se $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2$.

3) Se p e p' non sono paralleli, dal punto 1) segue che $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$, quindi

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = 2 \, .$$

Dal Teorema di Rouché-Capelli abbiamo che il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \end{cases}$$

è compatibile, e dal Teorema 1 segue che l'insieme delle sue soluzioni è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^3(K)$ di dimensione $3 - 2 = 1$, cioè una retta di $\mathbb{A}^3(K)$. Il risultato segue ora dal fatto che $p \cap p'$ coincide con l'insieme delle soluzione del precedente sistema lineare. $\square$

La seguente proposizione esprime le condizioni di parallelismo ed incidenza tra una retta ed un piano di $\mathbb{A}^3(K)$ in termini delle equazioni Cartesiane che li definiscono. La sua dimostrazione è analoga a quella della precedente proposizione ed i dettagli sono lasciati per esercizio.

Proposizione 3. *Siano*

$$r : \begin{cases} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \end{cases}$$

una retta, e $p : a''x + b''y + c''z = d''$ un piano di $\mathbb{A}^3(K)$. Allora valgono le seguenti affermazioni.

1) $r || p \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0$.

2) Se $r || p$, allora $r \cap p = \emptyset \Leftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} = 3$, altrimenti $r \subset p$.

3) r e p non sono paralleli se e solo se $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \neq 0$, *ed in tal caso r interseca p in un solo punto.*

Valgono risultati analoghi per esprimere le condizioni di parallelismo ed incidenza tra due rette di $\mathbb{A}^3(K)$ in termini delle loro equazioni Cartesiane, che non riportiamo in queste note.

Esempio 13. 1. Determiniamo un'equazione Cartesiana del piano affine $p \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e parallelo al piano $p' : x + y + z = 1$.

Osserviamo che la giacitura di p deve coincidere con quella di p', quindi è data dall'equazione $x + y + z = 0$. Ne segue che p è descritto da un'equazione del tipo $x + y + z = d$, per qualche $d \in \mathbb{R}$. Sostituendo ad x, y, z le coordinate di Q, otteniamo $d = 6$. Quindi $p : x + y + z = 6$.

2. Determiniamo un'equazione Cartesiana del piano $p \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ passante per il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e contenente la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x & = 1 + t \\ y & = -1 + 2t \\ z & = 2 - t\,, \end{cases}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Possiamo procedere in diversi modi. Ad esempio osservando che r è la retta passante per i punti $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, che si ottengono per $t = 0$, $t = 1$, rispettivamente. Il piano p deve contenere i punti Q, P_0, P_1, ed inoltre essi non sono allineati. Infatti i vettori

$$\overrightarrow{QP_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \,, \quad \overrightarrow{QP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sono linearmente indipendenti. Quindi un'equazione Cartesiana per p è la seguente:

$$\det \begin{pmatrix} x - 1 & 0 & 1 \\ y & -1 & 1 \\ z + 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -5(x - 1) + 3y + z + 1 = 0\,.$$

Un altro modo per trovare un'equazione di p è il seguente. Troviamo dapprima le equazioni Cartesiane di r:

$$\begin{cases} -2x + y + 3 & = 0 \\ x + z - 3 & = 0\,. \end{cases}$$

Ora osserviamo che ogni piano di equazione

$$p_{(\lambda,\mu)} : \lambda(-2x + y + 3) + \mu(x + z - 3) = 0\,,$$

con $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, contiene la retta r. L'insieme dei piani $p_{(\lambda,\mu)}$ si chiama **fascio proprio di piani contenente** r. In modo analogo al caso dei fasci propri di rette per un punto nel piano, si può dimostrare che per ogni piano p' contenente r, $\exists(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tale che $p' = p_{(\lambda,\mu)}$. Quindi per trovare p, basta determinare (λ, μ) tale che $Q \in p_{(\lambda,\mu)}$. Sostituendo le coordinate di Q ad x, y, z nell'espressione per $p_{(\lambda,\mu)}$ otteniamo l'equazione $\lambda - 3\mu = 0$. Ad esempio, per $\mu = 1$, $\lambda = 3$, si ha l'equazione $-5x + 3y + z + 6 = 0$ per p.

3. Si vogliono determinare equazioni Cartesiane della retta $r \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, passante per il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, contenuta nel piano $p : x + 2y = 3$, ed incidente la retta

$$r' : \begin{cases} x + z &= 2 \\ y &= 0\,. \end{cases}$$

Osserviamo che $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$, quindi per la Proposizione 3 p ed r' non sono paralleli. Allora $r' \cap p$ consiste in un punto P che è diverso da Q, perché le coordinate di Q non soddisfano le equazioni di r'. La retta cercata r coincide quindi con la retta passante per P e Q. Determiniamo le coordinate di P, che sono date dalla soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x + z &= 2 \\ y &= 0 \\ x + 2y &= 3\,, \end{cases}$$

$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. In conclusione, r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= 1 + 2t \\ y &= 1 - t \\ z &= 1 - 2t\,, \end{cases}$$

ed equazioni Cartesiane

$$\begin{cases} x + 2y &= 3 \\ 2y - z &= 1\,. \end{cases}$$