

# ASPETTI TOPOLOGICI

Consideriamo una teoria di campi in  $d=1$ , ad esempio i campi scalari

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Q} \quad \left( \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{Q} \\ x^\mu \mapsto \phi(x) \end{array} \right)$$
$$t \mapsto \varphi(t)$$

$\mathcal{Q}$  viene detto SPAZIO DELLE CONFIGURAZIONI. Ci concentreremo ora su spazi  $\mathcal{Q}$  topologicamente non-triviali, con  $\pi^1(\mathcal{Q}) \neq 0$

$\pi^1(\mathcal{Q})$  è il GRUPPO FONDAMENTALE di  $\mathcal{Q}$ :

- consideriamo i loop (curve chiuse) in  $\mathcal{Q}$ , cioè

$$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathcal{Q} \quad \text{t.c.} \quad \gamma(0) = \gamma(1)$$

chiamiamo  $\mathcal{L}(\mathcal{Q})$  lo spazio dei loop di  $\mathcal{Q}$

- prendiamo la relazione di equivalenza data dalle omotopie

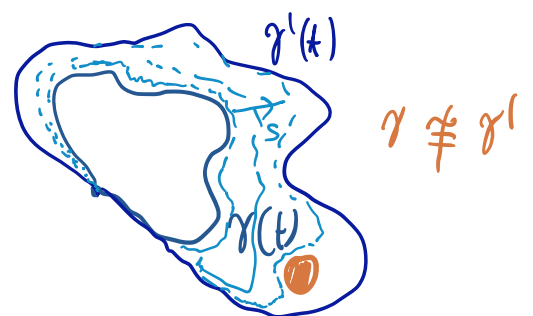
$$\gamma \cong \gamma' \quad \text{se } \exists \text{ omotopia (funz. continua)}$$

$$\alpha: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathcal{Q}$$

$t=0$                        $s=0$

(Per ogni valore di  $s$  si può definire una curva)

$$\text{t.c.} \quad \alpha(t,0) = \gamma(t) \quad \alpha(t,1) = \gamma'(t)$$



- Tutti i loop deformabili in maniera continua l'uno nell'altro stanno in UNA CLASSE DI EQUIVALENZA

- Possiamo costruire lo spazio quoziente (con l'insieme i cui elementi sono le classi di equivalenza)

$$\mathcal{L}(Q) / \sim \cong \pi^1(Q)$$

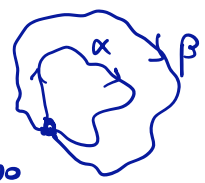
↑  
ha una struttura di GRUPPO:

→ il PRODOTTO è costruito a partire da  $\mathcal{L}(Q)$ :

$$\alpha, \beta \in \mathcal{L}(Q)$$

$$\alpha * \beta (t) \equiv \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t < 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\alpha(1) = \beta(0)$



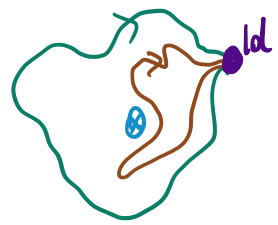
→ \* da prodotto che soddisfa condiz. di gruppo in  $\pi^1(Q)$ :

- $Id = [\text{loop costante}] \quad \gamma(t) = \gamma_0$
- Invert  $[\gamma(t)]^{-1} = [\gamma(1-t)]$
- Associatività è rispettata

• Se  $\pi^1(Q) \neq 0 \rightarrow Q$  NON è SEMPLICEMENTE CONNESSO

→ ci sono loop che non sono equivalenti all'identità, cioè non possono essere contratti a un pto.

Esempi 1)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$   
 $\pi^1 \cong \mathbb{Z}$   
 ↑  
 gruppo con +



$$\alpha \neq \beta$$

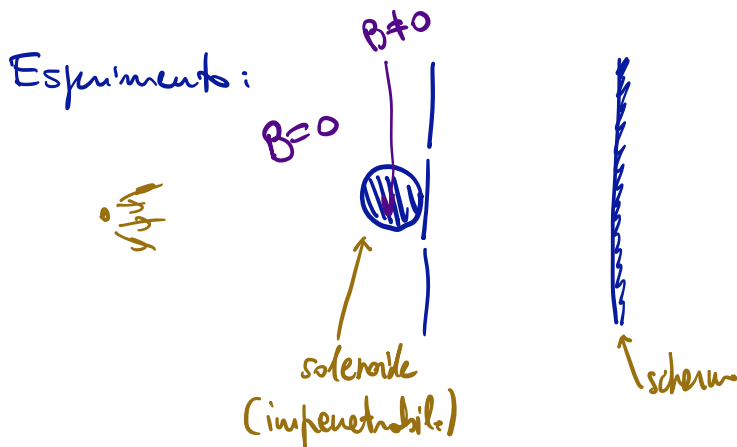
$$\begin{matrix} \uparrow \\ \mathbb{Z} \\ \uparrow \\ \mathbb{S} \end{matrix}$$

Un loop che gira n volte attorno {0}  $\neq$  a un loop " " m " " " {0} se  $n \neq m$   
 $[\gamma_n] \cdot [\gamma_m] = [\gamma_{n+m}]$  (isomorfismo di gruppi)

$$2) \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{cilindro infinito}\} \quad \pi^1 \cong \mathbb{Z}$$

### AHARONOV-BOHM EFFECT

[ Consideriamo una particella che si muove in  $Q$ , la sua traiettoria è descritta da un CAMPO  
 $x: \mathbb{R} \rightarrow Q$  (1 dim)  
 (possiamo interpretare la lagrangiana della particella  $L(x, \dot{x})$  come la lagrangiana di una teoria di campo 1dim.) ]



Le frange di interferenza CAMBIANO variando il campo magnetico  $B$  dentro il solenoide; inoltre, le fig. di interferenza si ripete uguale quando il flusso del campo magn.  $\Phi_B$  è shiftato di  $\frac{2\pi\hbar c}{e}$ .

Sp. delle confj.  $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{cilindro}\} \Rightarrow \pi^1(Q) = \mathbb{Z}$

Consideriamo un potenziale vettore

$$A = \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi$$

$\uparrow$   $\theta$   $\uparrow$   $d\varphi$   
 paramet. arbitrario angolo azimutale

$$\Rightarrow B = dA = 0$$

classicamente ci aspettiamo forza nulla sulla particella

$$\oint_{S^1} A = \int_0^{2\pi} \theta \frac{\hbar c}{2\pi e} d\varphi = \frac{\theta \hbar c}{e}$$

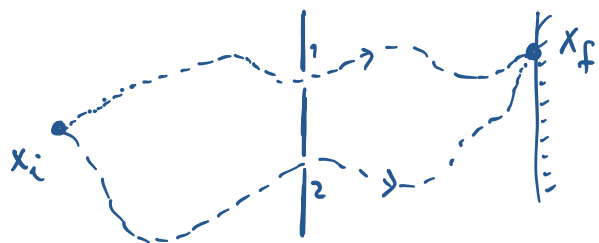
$$\rightarrow \theta = \frac{e}{\hbar c} \Phi_B$$



$$\int_D B = \Phi_B$$

$\partial D = S^1$

Consideriamo il caso senza solenoide (ovvero  $B=0$ )



Amplitude di probab. per una particella di essere misurata in  $x_f$  al tempo  $T$  se partita da  $x_i$  al tempo  $0$  è

$$K(x_f, x_i; T, 0) = \int \mathcal{D}x e^{iS[x]/\hbar} =$$

{ tutte le traiettorie con  
 $x(0) = x_i$      $x(T) = x_f$  }

$$= \int \mathcal{D}x e^{iS_1/\hbar} + \int \mathcal{D}x e^{iS_2/\hbar}$$

{traiett. n° 1}                      {traiett. n° 2}

↑  
 ampiezza di probab.  
 quando la fenditura 2  
 è CHIUSA

↑  
 ampiezza di probab.  
 prob la fenditura 1  
 è CHIUSA

$$= K_1(x_f, x_i; T, 0) + K_2(x_f, x_i; T, 0)$$

Se le fasi di  $K_1$  e  $K_2$  sono la stessa, abbiamo interferenza costruttiva; se le fasi sono opposte, abbiamo interf. distrutt.

Accendiamo  $B \neq 0$ , cioè  $\theta \neq 0 \rightarrow$  l'azione della particella carica cambia e viene aggiunto il termine

$$\int \mathcal{L}_A = -\frac{e}{c} \int dt \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} = -\frac{e}{c} \int \vec{A} \cdot d\vec{x} = -\frac{e}{c} \int_{\gamma} A$$

↳ integrale di A lungo traiettoria  $\gamma$

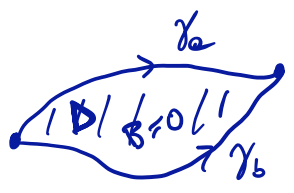
$A \dot{e} \text{ cost} \Rightarrow L_A = \frac{d}{dt} (\bar{x} \cdot \bar{A}(-\frac{e}{c}))$   $\dot{e}$  una DERIVATA TOTALE

$\Rightarrow$  le equazioni del moto (classiche) non vengono modificate  $\rightsquigarrow$  classicamente nessun effetto di  $B \neq 0$

Abbiamo aggiunto un nuovo termine in  $S \Rightarrow$  come cambia l'integrale sui cammini?

Notiamo che  $\int_{\gamma} \bar{A} \cdot d\bar{x}$  dipende solo DAI PTI INIZIALI E FINALE se la traiettoria passa per la STESSA FENDITURA:

$$\hookrightarrow \int_{\gamma_a} A - \int_{\gamma_b} A = \int_{\gamma_c} A + \int_{-\gamma_b} A = \oint_{\partial D} A = \int_D B = 0$$



↑  
se  $B=0$  dentro  $D$  (cioè  $\gamma_a$  e  $\gamma_b$  passano per stesse fendit.)

$\Downarrow$

$$K_i (B \neq 0) = \int_{\gamma \in \text{fendit } i} dx e^{iS_{cl} - \frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma} A} \quad \leftarrow \text{non dip. da } \gamma = e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma} A} K_i (B=0)$$

e con pt. iniz. e fin.  $x_i$   $x_f$

$B=0 \quad k = k_1 + k_2 = \rho (e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}) = \rho e^{i\phi_1} (1 + e^{i(\phi_2 - \phi_1)})$

$\phi_{12}$  fase relativa

$B \neq 0 \quad K_B = e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_1} A} k_1 + e^{-\frac{ie}{\hbar c} \int_{\gamma_2} A} k_2$

$$= \rho (e^{i\phi_1'} + e^{i\phi_2'}) = \rho e^{i\phi_1'} (1 + e^{i(\phi_2' - \phi_1')})$$

$\phi_{12}'$

$$\phi_{12}' = \phi_{12} - \frac{e}{\hbar c} \oint_{\gamma_1 - \gamma_2} A = \phi_{12} - \frac{e \Phi_B}{\hbar c}$$

$\Downarrow$   
 diverso pattern di interferenza

$A$  e  $A'$  sono equiv. (producono la stessa dinamica)

se  $\oint A' = \oint A + \frac{\hbar c}{e} 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

$$A = \frac{\hbar c}{2\pi e} d\phi$$

$\Rightarrow A$  e equiv. a  $A'$  se  $\theta - \theta' = 2\pi n$

- Diverse scelte di  $A$  sono parametrizzate da  $\theta \in [0, 2\pi[$
  - Classicamente, tutti i valori di  $\theta$  danno la "stessa teoria" (Lagrangiana equiv.), mentre quantisticamente le "teorie" sono inequivalenti
- $\Downarrow$

abbiamo diverse "teorie" quantistiche corrispondenti a una "teoria classica" (parametrizzate da  $\theta \in [0, 2\pi[$ )

(ci sono quantizzazioni inequivalenti di una teoria classica)

$\downarrow$   
 caratteristico di spazi della config.

NON semplicemente connessi

(cioè  $\pi^1(Q) \neq 0$ )

P1 e spazi con  $\pi^1(Q) \neq 0$

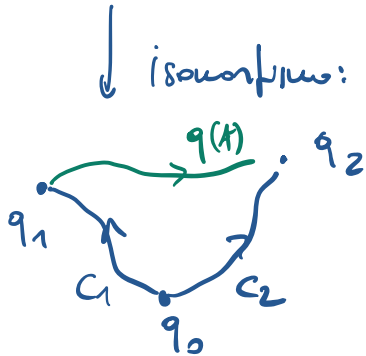
$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int \mathcal{D}q \ e^{iS/q}$$

{ tutti i cammini da  
uniscano  $q_1$  con  $q_2$  }



appartengono a classe di omotopia

Ci sono tante classi di omotopia di cammini da  $q_1$  a  $q_2$   
presente classi di omotopia di loop che iniziano e finiscono  
in un pto  $p_0$ , cioè elem. di  $\pi^1(Q)$



cammino      loop

$$[q] \leftrightarrow [c_2^{-1} \cdot q \cdot c_1]$$

Nota: classi di omotopia sono insieme disgiunti di cammini

Definiamo  $K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1) = \int \mathcal{D}q_\alpha \ e^{iS/q}$

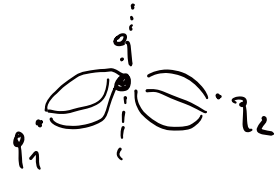
{ cammini da  $q_1$  a  $q_2$   
nella classe di omotopia  $\alpha$  con  $\alpha \in \pi^1(Q)$  }

$$K(q_2, q_1; t_2, t_1) = \sum_{\alpha \in \pi^1(Q)} \chi(\alpha) \cdot K_\alpha(q_2, q_1; t_2, t_1)$$

soddisfa le proprietà di un'ampiezza di prob. deve  
soddisfare quando

1)  $K$  non dipende dalla scelta di  $c_1$  e  $c_2$

$$2) \quad K(p_2, t_1; q_2, t_2) = \int_{t_1 < t < t_2} dq \, K(p_2, q; t_2, t) K(q, p_1; t, t_1)$$



Qto avviene se i  $\chi(\alpha)$  soddisfano:

$$\chi(\beta \cdot \alpha) = \chi(\beta) \chi(\alpha)$$

$\chi(\alpha)$  forma una rapp. 1-dimensionale unitaria  
del gruppo fondamentale } (\*)

$$\chi: \pi^1(Q) \rightarrow \{e^{i\varphi}\} \quad \leftarrow \text{"CARATTERI" di } \pi^1(Q)$$

$$(|\chi(\alpha)| = 1)$$

Se  $\pi^1(Q) \neq 0$  abbiamo un'ambiguità nel dire quale teoria quantistica corrisponde alla teoria classica di partenza. Qte ambiguità è data dalla scelta di  $\chi(\alpha)$  soddisfacenti le prop (\*).



## Particelle identiche

- Prendiamo un sistema di 2 particelle IDENTICHE in  $\mathbb{R}^d$ .
- Lo sp. delle config è

$$Q = (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{\bar{x}_1 = \bar{x}_2\}) / \mathbb{Z}_2$$

parametrizzato da  $\{(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \mid \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2\} / \sim$

$$\text{dove } \sim \text{ è } (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \sim (\bar{x}_2, \bar{x}_1)$$

- Loop non contrattibili a cost:

$$(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)) \quad \text{t.c.} \quad \begin{array}{ll} \bar{x}_1(0) = \bar{x}_1^0 & \bar{x}_2(0) = \bar{x}_2^0 \\ \bar{x}_1(1) = \bar{x}_2^0 & \bar{x}_2(1) = \bar{x}_1^0 \end{array}$$

↳ cammino che scambia la posizione delle due particelle; componendo con se stesso otteniamo cammino triviale!

$$\pi_1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{\bar{x}_1 = \bar{x}_2\}) / \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$$

- Caratteri di  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow$  due possibilità:

$$1) \chi^B(\alpha) = 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_2$$

$$2) \chi^F(\alpha) = \begin{cases} 1 & \forall \alpha \text{ che sia scambio pari} \\ -1 & \forall \alpha \text{ " " " " dispari} \end{cases}$$

$$K^B = \sum_{\alpha} \chi^B(\alpha) K_{\alpha} \quad \Leftrightarrow \text{funzioni d'onda simmetriche} \quad \text{BOSONI}$$

in scambio di particelle

$$K^F = \sum_{\alpha} \chi^F(\alpha) K_{\alpha} \quad \Leftrightarrow \text{" " antisimmetriche} \quad \text{FERMIONI}$$

" " " "