P.I. and Θ-term

Se sp. Q non-sempl. conn.: 1) aggiungere A (con B=0) cambia le predizioni della teoria quant. 2) ambiguità nel def. P.I.

C'è una corrispondenza 1 a 1 tra i caratteri di $\pi^1(Q)$ e i potenziali vettori ("flat connection") A viste nello studio dell'effetto di AB:

$$\chi(\alpha) = e^{\frac{ie}{\hbar c}\oint_\ell A} \qquad \ell \in \alpha$$

$\uparrow$ classe di equiv.

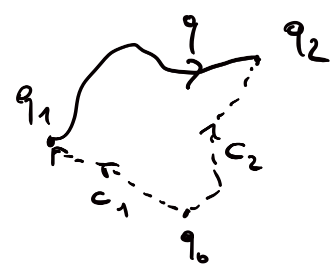
Prendiamo teoria di partenza; aggiungiamo derivata totale e vediamo se P.I. viene modificato coi $\chi(\alpha)$

Aggiungiamo all'azione il "termine topologico"

$$S_T = \frac{e}{c}\int_{t_1}^{t_2} dt\, \dot{q}\cdot \bar{A}$$

$\leftarrow$ dipende solo da pto iniziale e pto finale e dalla classe d'omotopia

$$K(q_2,q_1;t_2,t_1) = \int_{\substack{q(t_1)=q_1\\ q(t_2)=q_2}} \mathcal{D}q\; e^{\frac{i}{\hbar}(S+S_T)} =$$



$$= \sum_\alpha e^{\frac{iS_T}{\hbar}} \int \mathcal{D}q_\alpha\; e^{iS/\hbar}$$

$$= \sum_\alpha e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{q\in\alpha} A} K_\alpha(q_2,q_1) =$$

$$= \sum_\alpha e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_2 \alpha c_1^{-1}} A} K_\alpha(q_2,q_1) =$$

$$= \sum_\alpha e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_2} A}\, e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{\alpha} A}\, e^{\frac{ie}{\hbar c}\int_{c_1^{-1}} A} K_\alpha(q_2,q_1)$$

$$= \underbrace{e^{\frac{ie}{\hbar c}\left(\int_{c_2} A + \int_{c_1^{-1}} A\right)}}_{\text{fase irrilevante}} \sum_\alpha \chi(\alpha) K_\alpha(q_2,q_1) \qquad !$$

Per calcolare l'ampiezza, uno si deve calcolare i singoli K_α, che sono definiti da P.I. standard.

In situazione semiclassica ($\hbar \to 0$) K_α è ben approssimato da $e^{iS[\varphi_{cl}]} (\det \Delta)^a \leftarrow$ integrale Gaussiano

difficile approssimare K_α

$\Uparrow$

non è tipica traiett. class.

Tipicamente le classi α non contengono soluzioni classiche. Tuttavia, se passiamo all'Euclideo $S \to S_E$ $\quad \int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS} + \int \mathcal{D}\varphi\, e^{-S_E}$

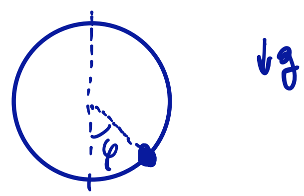
$\rightarrow$ S_E ammette soluzioni alle sue eq. di Lagrange nelle classi di omotopia α, chiamate ISTANTONI

$$K_\alpha^E \sim e^{-S_E(\varphi_{ist})} (\det \Delta)^a$$

$\downarrow$ CONTINUAZIONE ANALITICA

$K_\alpha^{Mink.}$

PENDOLO



$Q = S^1$

$\uparrow$ circonferenza

$\pi^1(S^1) = \mathbb{Z}$

$\downarrow$

Ci aspettiamo quantizzazioni inequivalenti, parametrizzate da $\theta \in [0, 2\pi[$

$$L = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \qquad V(\varphi) = b(1 - \cos\varphi) \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$$

Termine topologico ($\leadsto$ interazione con un potenziale vettore)

$$L_T = \theta \frac{\hbar}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt} \qquad \text{(derivata totale)}$$

$\downarrow$

$$S_T = \theta \frac{\hbar}{2\pi} \int dt \, \frac{d\varphi}{dt} = \theta \hbar \underbrace{W[\varphi]}_{\text{winding number } \in \mathbb{Z}}$$

Assumendo che $\varphi \to 0$ per $t \to \pm\infty$

Istantoni per il pendolo:

$t \to i\tau \qquad iS \to -S_E$

$$S_E = \int d\tau \left[\frac{1}{2} (\partial_\tau \varphi)^2 + b(1 - \cos\varphi) \right]$$

Eq. del moto $\to$ eq. di Lagr. associate a S_E, cioè le soluz. sono t.c. $\delta S_E = 0$.

Sol: $\varphi_{ist.}(\tau) = \pm 4 \, \mathrm{arctg}\left(e^{\sqrt{b}(\tau - \tau_0)} \right)$

per $\tau \to -\infty \qquad \varphi \to 0$

per $\tau \to +\infty \qquad \varphi \to 2\pi$

$W(\varphi) = 1$

- $S_E(\varphi_{ist.})$ è finita
- $\varphi_{ist.}$ non può essere deformata in maniera continua alla soluz. "di vuoto", cioè $\varphi_0(\tau) = \varphi_{cost}$
- Esistono soluz. con $W(\varphi) \neq 1$, ce ne è una in ogni classe di omotopia, $\varphi^{\alpha}_{ist.}$

- $K_\alpha \sim e^{-S_E(\varphi^\alpha_{ist.})} \cdot \det_\alpha(\dots)^{-1/2}$

$$K = \sum_\alpha \underbrace{\chi(\alpha)\, e^{-S^{(0)}_E(\varphi^\alpha_{ist.})}}_{e^{-S_E(\varphi^\alpha_{ist.})}} \cdot \det_\alpha(\dots)^{-1/2}$$

$$e^{-S_E(\varphi^\alpha_{ist.})} \sim e^{-n(\dots)}$$

$[\alpha] \sim n$

$\pi_1(Q) \cong \mathbb{Z}$

contributo di K_α diminuisce all'aumentare di n

SPAZIO DELLE CONFIG. per teorie di gauge non-abeliane

Consideriamo una teoria di YM. Usiamo la gauge $A_0^a = 0$ (gauge fixing)

- La teoria è descritta dalle "coord" $A_i^a(\bar{x})$ $i = 1,2,3$ — coord. in Q; $\bar{x}$: indice continuo $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ (t è il parametro delle traiettorie)
- Per semplicità consideriamo $G = SU(2)$.
- $A_i^a(\bar{x})$ sono ridondanti, a causa delle trasf. di gauge residue:

$$A_i \mapsto U A_i U^{-1} + i\, \partial_i U\, U^{-1} \qquad U : \mathbb{R}^3 \to SU(2)$$

$$A_0 = 0 \mapsto A_0 = 0$$

- Spazi rilevanti per noi:

$$\mathcal{A} = \{ \text{gauge fields } A_i^a(\bar{x}) \}$$

$$\Omega_* = \{ \text{trasf. } U : \mathbb{R}^3 \to SU(2) \text{ t.c. } U(\bar{x}) \to \mathbb{1} \text{ per } |\bar{x}| \to \infty \}$$

- Lo sp. delle config. è $Q = \mathcal{A}/\Omega_*$

Ω agisce trasformando gli stati con G all'∞; Ω_* invece è una ridondanza perché lascia stati phys inv.

$\mathcal{A})$ è uno spazio AFFINE (cioè ogni A_i può essere scritto come $A_i^{(0)} + h_i$ dove $A_i^{(0)}$ è l'origine fissata e h_i un vettore arbitrario (a valori nell'Alg. di Lie)):

se $A_i^{(1)}, A_i^{(2)} \in \mathcal{A}$ allora possiamo costruire il cammino

$$A_i(\bar{x};\tau) = A_i^{(1)}(\bar{x})(1-\tau) + \tau A_i^{(2)}(\bar{x}) \in \mathcal{A} \quad \forall \tau [0,1]$$

$\hookrightarrow$ $\mathcal{A}$ ha le proprietà di uno spazio Euclideo a dim. ∞, che è topologicamente triviale; in particolare

$$\pi^1(\mathcal{A}) = 0 .$$

$\Omega_*)$ $G = SU(2)$. Parametrizziamo $SU(2)$ nel seguente modo

$$U = \phi_0 \mathbb{1}_2 + i \phi_i \sigma_i$$

con $\phi_0, \phi_i \in \mathbb{R}$ e $\underline{\phi_0^2 + \sum_i \phi_i^2 = 1}$

questo implica che $U^\dagger = U^{-1}$ e $\det U = 1$

$U(x) = \phi_0(x) + i\phi_i(x)\sigma_i$

$SU(2)$ è topologicamente una SFERA S^3

In particolare, $\phi_\mu(x)$ $(\mu = 0,1,2,3)$ sono mappe $: \mathbb{R}^3 \to S^3$

Inoltre se $U(x) \in \Omega_*$, $U(x) \xrightarrow[\bar{x}\to\infty]{} \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ possiamo identificare i punti all'infinito: $U(x)$ si comporta come una funzione da $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \to S^3$, cioè $U : S^3 \to S^3$ se $U \in \Omega_*$

$\downarrow$

Esplicitam.: $y_0 \equiv \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $y_i \equiv \frac{2x_i}{x^2+1}$ $y_0^2+\sum_i y_i^2 = 1$

- diversi x_i danno diversi y_i
- $|\vec{x}| \to \infty$ corrisponde a $y_0 = 1$ $y_i = 0$

$U \to \mathbb{1}$ in $y \to (1,0,0,0)$

Le mappe $U(x)$ sono funz. $S^3 \to S^3$. Tali mappe sono classificate in CLASSI DI OMOTOPIA che appartengono al gruppo $\pi^3(S^3) \cong \mathbb{Z}$

Si analizzano queste mappe definendo un WINDING NUMBER W (ci dice quante volte S^3_x è arrotolata su S^3_ϕ)

$$\phi_\mu : S^3_x \to S^3_\phi$$

Winding number:

consideriamo l'elemento di volume in l'immagine generata da ϕ_μ

$$dS_\mu \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta \epsilon^{ijk} d^3x$$

$$\updownarrow$$

$$dS_\mu = \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijk} \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta d^3x$$

$$= \phi_\mu d\Omega^{(3)} \qquad d\Omega^{(3)\mu} = \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijk} \partial_i \phi_\nu \partial_j \phi_\alpha \partial_k \phi_\beta \phi_\mu \cdot d^3x$$

Il volume di S^3 è $2\pi^2$, mentre il volume misurato con l'immagine di ϕ è $\int_{S^3_x} d\Omega^{(3)}$

$$W(\phi) = \frac{\text{volume misurato con immagine di } \phi}{\text{volume misurato con misura standard su } S^3}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^3_x} d\Omega^{(3)} = \frac{1}{12\pi^2} \int d^3x \; \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{ijk} \phi^\mu \partial_i \phi^\nu \partial_j \phi^\alpha \partial_k \phi^\beta$$

$2\pi^2 \cdot 3!$

$$W(U) = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_x} d^3x \; \mathrm{Tr}\left[U^{-1}\partial_i U \; U^{-1}\partial_j U \; U^{-1}\partial_k U \right] \epsilon^{ijk}$$

$$= -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_x} \mathrm{Tr}\left[\left(U \, dU^{-1} \right)^3 \right]$$

W ha le seguenti proprietà:

"invariante topologico"

1) W è invariante per deformazioni continue delle mappe $\phi_\mu(x)$

(W è costante su una classe di omotopia)

consideriamo una def. $\delta\phi^\mu$ t.c. $\delta\phi^\mu \to 0$ per $|\bar{x}| \to \infty$

(per preservare $U \to 1$ per $|\bar{x}| \to \infty$)

inoltre $\phi^\mu \delta\phi^\mu = 0$ (perché $\phi^\mu \phi^\mu = 1$)

allora

$$\delta W = W(\phi + \delta\phi) - W(\phi) = \frac{1}{12\pi^2} \int d^3x \; \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Big[\delta\phi^\mu \underbrace{d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta}_{\sim\, \partial_i\phi^\nu \partial_j\phi^\alpha \partial_k\phi^\beta \epsilon^{ijk} d^3x} +$$

$$+ \phi^\mu d\delta\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta + \phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\delta\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta + \phi^\mu d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\delta\phi^\beta \Big]$$

altro termine quando integro per parti

$d^2 = 0$

integr. per parti

$$= \frac{1}{\cancel{12}_{\,6}\,\pi^2} \int d^3x \; \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \, \delta\phi^\mu \, d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta$$

$\delta\phi \to 0$ al bordo

Teniamo conto che $\quad \delta\phi^\mu \phi^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\phi^\mu = \epsilon^{\mu\rho\sigma\lambda}\omega_{\rho\sigma}\phi_\lambda$

con $\omega_{\rho\sigma}$ tensore antisimm.

(è come dire in 3d che un vett. $\delta\bar{v} \perp \bar{v}$ è parametrizzato da $\bar{w}$ nel seguente modo
$\delta\bar{v} = \bar{w} \times \bar{v}$)

$$\rightarrow \delta W = \frac{1}{\cancel{12}\,6\pi^2}\int d^3x \, \Big(\underbrace{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\epsilon^{\mu\rho\sigma\lambda}}_{\substack{\text{somme di prodotti di}\\ \delta\text{-symbols } \delta^{\rho\sigma\lambda}_{\nu\alpha\beta}}} \Big)\, \omega_{\rho\sigma}\, \underbrace{\phi_\lambda \, d\phi^\nu \wedge d\phi^\alpha \wedge d\phi^\beta}_{\downarrow} = 0$$

$$\phi_\lambda \, d\phi^\lambda = d(\overset{1}{\overset{\parallel}{\phi_\lambda\phi^\lambda}}) = 0$$