Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 9

1) Dimostrare che un retratto di uno spazio di Hausdorff è chiuso ($A \subset X$ è retratto di X se esiste $r: X \to A$ retrazione).

2) Dimostrare che $p: S^1 \to S^1$, $p(z) = z^2$, è un rivestimento, dove consideriamo $S^1 \subset C$.

3) Sia $U \subset R^n$ un aperto non vuoto e connesso. Dimostrare che ogni cammino in U è omotopo (rel $\{0,1\}$) ad un cammino poligonale (cioè un cammino che è unione finita di segmenti consecutivi). Suggerimento: utilizzare un ricoprimento aperto di bocce.

4) Dimostrare che $\mathrm{O}(n)$ ha due componenti connesse per archi di cui una è $\mathrm{SO}(n)$ (suggerimento: induzione su n). Dimostrare anche che le due componenti sono tra loro omeomorfe.

5) Dimostrare che qualunque rivestimento di R è banale. Suggerimento: usare il sollevamento dei cammini.

6) Dimostrare che $\mathrm{SO}(2) \cong S^1$.

7) Dimostrare che $\mathrm{GL}_2(R)$ si deforma su $\mathrm{O}(2)$. Suggerimento: usare Gram-Schmidt in modo continuo.

8) Sia $K \subset R^n$ compatto non vuoto. Dimostrare che $R^n - K$ ammette una retrazione su $S^{n-1}(a)$, sfera centrata in 0 di raggio sufficientemente grande $a > 0$.