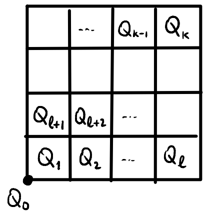
Lezione 19

Teorema di sollevamento delle omotopie Sia $p: Y \to X$ un rivestimento e sia $H: I \times I \to X$ un'omotopia con $H(0,0) = x_0 \in X$. Allora $\forall\, y_0 \in p^{-1}(x_0)$ $\exists!\ \tilde{H}: I \times I \to Y$ sollevamento di H t.c. $\tilde{H}(0,0) = y_0$. Inoltre se H è relativa a $\{0,1\}$ allora $\tilde{H}$ è relativa a $\{0,1\}$.



Dim (idea) Si procede in modo simile al sollevamento dei cammini. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ric. ap. banalizz. di $X \rightsquigarrow \{H^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ ricoprimento aperto di $I \times I \rightsquigarrow \delta > 0$ numero di Lebesgue

$\rightsquigarrow$ suddivisione di $I \times I$ in quadratini numerati $\{Q_i\}_{i=1}^{k}$, diam $Q_i < \delta$

$\Rightarrow H(Q_i) \subset U_{\alpha_i}$ per certo $\alpha_i \in A$, $Q_0 = \{(0,0)\}$, $\tilde{Q}_i = \bigcup_{r=0}^{i} Q_r$

Partendo da $(0,0)$ si definiscono sollevamenti in modo ricorsivo

$\tilde{H}_i : \tilde{Q}_i \to Y$ sollevamento di H su $\tilde{Q}_i$

$\tilde{H}_0(0,0) = y_0$, $\quad \tilde{H}_{i-1} \xrightarrow{\text{induzione}} \tilde{H}_i$

Funziona perché $\tilde{Q}_{i-1} \cap Q_i$ connesso (per archi) $\forall\, i \geq 1$:

$\bullet \qquad | \qquad — \qquad \llcorner$

$$\Rightarrow \quad \tilde{Q}_{i-1} \cap Q_i \subset V_{\alpha_i, j_i} \rightsquigarrow p_{\alpha_i, j_i} = p|: V_{\alpha_i, j_i} \xrightarrow{\cong} U_{\alpha_i} \text{ omeo}$$

$$\rightsquigarrow \quad \tilde{H}_i(t,s) = \begin{cases} \tilde{H}_{i-1}(t,s), & (t,s) \in \tilde{Q}_{i-1} \\ p_{\alpha_i, j_i}^{-1}(H(t,s)), & (t,s) \in Q_i \end{cases}$$

L'unicità segue dall'unicità della costruzione e dal fatto che Q_i cpa.

Infine H rel $\{0,1\} \Rightarrow H(0,s) = x_0\ \forall\, s \in I \Rightarrow \tilde{H}(0,s) \in \underbrace{p^{-1}(x_0)}_{\text{discreto}}$

$\Rightarrow \tilde{H}(0,s) =$ costante perché I connesso $\Rightarrow \tilde{H}(0,s) = y_0\ \forall\, s \in I$

e analogamente per $\tilde{H}(1,s) \in p^{-1}(x_1)$ con $x_1 = H(1,s)$.

Topologia quoziente

Sia X uno spazio e $\sim$ una relazione d'equivalenza su X

$\forall\, x \in X \rightsquigarrow [x] := \{ y \in X \mid y \sim x \}$ classe d'equivalenza di x

$\rightsquigarrow X/\!\sim\; := \{ [x] \mid x \in X \}$ insieme quoziente

$\rightsquigarrow \pi : X \longrightarrow X/\!\sim$ mappa quoziente

$\pi(x) := [x]$

Def La topologia quoziente su $X/\!\sim$ è definita da:

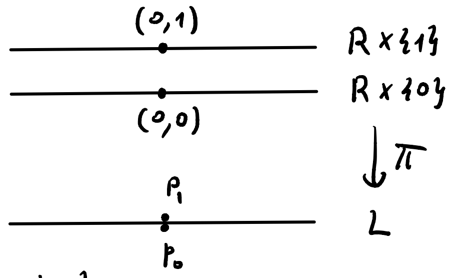
$U \subset X/\!\sim$ aperto in $X/\!\sim \iff \pi^{-1}(U) \subset X$ aperto in X.

$X/\!\sim$ con la topologia quoziente è detto spazio quoziente.

OSS $\pi : X \to X/\!\sim$ è continua.

Es $X = \mathbb{R} \times \{0,1\} \subset \mathbb{R}^2$, $(x,i) \sim (y,j) \iff (x,i) = (y,j)$ oppure

$x = y \neq 0$ e $i \neq j$



Le due rette sono identificate tra loro ma

non nell'origine: $L = X/\!\sim$ retta con due origini

$p_0 = [(0,0)]$, $p_1 = [(0,1)]$, $L - \{p_0, p_1\} \cong \mathbb{R} - \{0\}$

L è T_1 ma non T_2: $V_0 = \pi(\mathbb{R} \times \{0\})$, $V_1 = \pi(\mathbb{R} \times \{1\})$, $p_0 \in V_0$, $p_1 \in V_1$

ma $\forall\, U_0, U_1 \subset L$ aperti, $p_0 \in U_0$, $p_1 \in U_1 \Rightarrow U_0 \cap U_1 \neq \emptyset$

Spazi proiettivi Su $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ $x \sim y \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ t.c. $x = \lambda y$

$\rightsquigarrow \mathbb{RP}^n := (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\!\sim$ spazio proiettivo n-dimensionale reale

Su $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$: $x \sim y \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ t.c. $x = \lambda y \rightsquigarrow$

$\mathbb{CP}^n := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\!\sim$ spazio proiettivo n-dimensionale complesso

con la topologia quoziente.

Teorema Un'applicazione $f : X/\sim \to Y$ è continua $\iff$ $f \circ \pi : X \to Y$ è continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ X/\sim \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $f \circ \pi$ continua in quanto composizione di applicazioni continue.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, V \subset Y$ aperto $\Rightarrow$ $\pi^{-1}(f^{-1}(V)) = (f\circ\pi)^{-1}(V)$ aperto in X

$\Rightarrow f^{-1}(V)$ aperto in $X/\sim$.

Corollario $f : KP^n \to KP^n$ proiettività $\Rightarrow$ f omeo, con $K = R, C$.

Dim Verifichiamolo con $K = R$ ($K = C$ identico).

$\exists\ \tilde{f} : R^{n+1} \to R^{n+1}$ automorfismo lineare t.c. $f([x]) = [\tilde{f}(x)]$

$\tilde{f}$ continua

$$\begin{tikzcd} R^{n+1}-\{0\} \arrow[r, "\tilde{f}|"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi\circ\tilde{f}|", "f\circ\pi"'] & R^{n+1}-\{0\} \arrow[d, "\pi"] \\ RP^n \arrow[r, "f"'] & RP^n \end{tikzcd}$$

$f \circ \pi = \pi \circ \tilde{f}|_{R^{n+1}-\{0\}}$ $\Rightarrow$ f continua.

f^{-1} continua in quanto proiettività.

$x = (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1}-\{0\} \rightsquigarrow [x] = [x_0, \dots, x_n]$ <u>coordinate omogenee</u>

Carte affini

$H_i : x_i = 0$, $H_i \subset KP^n$ iperpiano proiettivo $\Rightarrow$ $H_i \cong KP^{n-1}$ <u>chiuso</u>.

$\varphi_i : KP^n - H_i \xrightarrow{\cong} K^n$ $\quad$ i-esima <u>carta affine</u>

$$\varphi_i([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

φ_i <u>omeo</u> $\forall\, i = 0, \dots, n$. Infatti φ_i continua perché $\varphi_i \circ \pi|$ continua

e $\varphi_i^{-1}(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n]$ continua perché

$\varphi_i^{-1} = \pi \circ \psi_i$, $\psi_i : K^n \to K^{n+1}-\{0\}$, $\psi_i(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, 1, \dots, y_n)$.

$U_i = KP^n - H_i \subset KP^n$ aperto $\rightsquigarrow$ $KP^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$ e $U_i \cong K^n$.

$[x] \in KP^n \Rightarrow [x] = \left[\frac{x}{\|x\|}\right]$

<u>$K=R$</u> $\quad x \in R^{n+1} - \{0\} \Rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in S^n \rightsquigarrow p := \pi|_{S^n} : S^n \to RP^n$

suriettiva e continua $\Rightarrow RP^n$ compatto e connesso per archi ($RP^0 = \{[1]\}$ ovviamente cpa).

Mostriamo che $p: S^n \to RP^n$, $p(x) = [x]$, è un rivestimento doppio (cioè con due fogli).

$x, y \in S^n$, $x \sim y \iff \exists\, \lambda \in R - \{0\}$ t.c. $x = \lambda y \Rightarrow 1 = \|x\| = |\lambda|\,\|y\| = |\lambda|$

$\Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x \Rightarrow p^{-1}([x]) = \pm x \rightsquigarrow \{1, -1\}$ fibra di p.

$U_i = RP^n - H_i$ aperto banalizzante infatti $p^{-1}(U_i) = V_{i,+} \sqcup V_{i,-}$ dove

$V_{i,+} = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i > 0\}$, $V_{i,-} = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i < 0\}$

$p_{i,\pm} = p|_{V_{i,\pm}} : V_{i,\pm} \xrightarrow{\cong} U_i$, $\quad p_{i,\pm}^{-1} : U_i \xrightarrow{\cong} V_{i,\pm}$ omeo

$$p_{i,\pm}^{-1}([x_0, \dots, x_n]) = \pm \operatorname{sgn}(x_i)\,(x_0, \dots, x_n).$$

Ad esempio $p_{i,+}^{-1}([x_0, \dots, x_n]) = \operatorname{sgn}(x_i)\,(x_0, \dots, x_n)$ ben definita e continua infatti $(p_{i,+}^{-1} \circ \pi)(x_0, \dots, x_n) = \frac{x_i}{|x_i|}\,(x_0, \dots, x_n)$ continua essendo $\operatorname{sgn}(u) = \frac{u}{|u|} = \pm 1$, $\forall\, u \in R - \{0\}$.

$\Rightarrow p_{i,\pm}$ omeo $\forall\, i = 0, \dots, n \Rightarrow U_i$ aperto banalizzante $\forall\, i = 0, \dots, n$

$\{U_0, \dots, U_n\}$ ricoprim. aperto di $RP^n \Rightarrow p$ rivestimento con fibra $\{1, -1\}$.

<u>$K=C$</u> $\quad x \in C^{n+1} - \{0\} \cong R^{2n+2} - \{0\} \Rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in S^{2n+1} \rightsquigarrow$

$p = \pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \to CP^n$ continua e suriettiva $\Rightarrow$

CP^n compatto e connesso per archi.

$x, y \in S^{2n+1} \subset C^{n+1}$, $x \sim y \iff \exists\, \lambda \in C - \{0\}$ t.c. $x = \lambda y \Rightarrow$

$1 = \|x\| = |\lambda|\,\|y\| = |\lambda| \Rightarrow \lambda \in S^1 \subset C \Rightarrow p^{-1}([x]) = \{\lambda x \mid \lambda \in S^1\}$

$\Rightarrow p$ non è rivestimento!