# Convergenza di Successioni di Variabili Aleatorie

# Convergenza di VA

- Definire i vari tipi di convergenza di successioni di variabili aleatorie
  - quasi certa
  - in probabilità
  - in $L^p$
  - in distribuzione
- Relazioni tra i vari tipi di convergenza, esempi
- Due risultati classici
  - Legge dei Grandi Numeri
  - Teorema del Limite Centrale

# Convergenza di VA

- Data una successione $(X_n)_{n\geq 1}$ di va su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ e una va $X$
  - [Convergenza quasi certa] $X_n \to X$ q.c. se esiste $A \in \mathscr{F}$, $P(A) = 1$ tale che
  $$\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \text{ per ogni } \omega \in A$$
  - [Convergenza in probabilità] $X_n \to^{\mathrm{P}} X$ se per ogni $\varepsilon > 0$
  $$\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

# Convergenza di VA

- Data una successione $(X_n)_{n\geq 1}$ di va su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ e una va $X$
  - [Convergenza in $L^p$, $p \geq 1$] quando $X_n, X \in L^p$, $X_n \to^{L^p} X$ se

$$\lim_{n\to+\infty} d_p(X_n, X) = \lim_{n\to+\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$$

  - [Convergenza in distribuzione o legge] $X_n \to^{\mathrm{d}} X$ se per ogni $x \in \mathbb{R}$ punto di continuità di $F_X$,

$$\lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

- Il limite è unico q.c. per convergenza q.c., in probabilità e in $L^p$; è unica in legge nel caso di convergenza in legge

# Convergenza di VA

- Relazione tra vari tipi di convergenza
  - $X_n \to X$ q.c. $\Rightarrow$ $X_n \to^{\mathrm{P}} X$; l'implicazione opposta vale su una sottosuccessione
  - se per $p \geq 1$ e $X_n \to^{L^p} X$, allora
    1. $X_n \to^{L^q} X$ per ogni $1 \leq q \leq p$
    2. $X_n \to^{\mathrm{P}} X$
    3. $\lim_{n \to +\infty} E[|X_n|^p] = E[|X|^p]$
  - $X_n \to^{\mathrm{P}} X \Rightarrow X_n \to^{\mathrm{d}} X$; l'implicazione opposta vale se $X$ è degenere

# Convergenza di VA

- Convergenza in legge: coinvolge solo le fdr delle variabili ($\equiv$ le leggi immagine), possono essere anche definite su spazi di prob. diversi! si scrive

$$F_{X_n} \to^{\mathrm{d}} F_X$$

- le seguenti proposizioni sono equivalenti
  - $X_n \to^{\mathrm{d}} X$
  - per ogni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e limitata

$$\lim_{n\to+\infty} E[g(X_n)] = E[g(X)]$$

  - per ogni $B \in \mathscr{B}$ con $P(X \in \mathrm{Fr}(B)) = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n \in B) = P(X \in B)$$

  - per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_n}] = E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX_n}]$$

# Convergenza di VA

- Esercizio. siano $(X_n)_{n\geq 1}$ iid con $X_n \sim U(0,1)$ e poniamo

$$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

  verificare che

  - $M_n \to 1$ q.c.
  - $M_n \to^{\mathrm{P}} 1$
  - $M_n \to^{L^2} 1$
  - $M_n \to^{\mathrm{d}} 1$

# Convergenza di VA

- Per una successione $(X_n)_{n\geq 1}$ di va si pone

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n \qquad \text{somma parziale}$$

$$\frac{S_n}{n} \qquad \text{media empirica}$$

- Legge forte dei grandi numeri: se $(X_n)_{n\geq 1}$ sono iid e $X_n \in L^1$ per ogni $n$ allora

$$\frac{S_n}{n} \to E[X_1] \text{ q.c. e in } L^1$$

inoltre se $X_n \in L^2$ per ogni $n$ allora

$$\frac{S_n}{n} \to^{L^2} E[X_1]$$

# Convergenza di VA

- Teorema del Limite Centrale (CLT). Idea: la media empirica di termini casuali "piccoli" si distribuisce normalmente

- CLT, versione "classica": $(X_n)_{n\geq 1}$ successione di va iid con $X_n \in L^2$ per ogni $n \geq 1$,

$$E[X_n] = \mu, \qquad \mathrm{VAR}[X_n] = \sigma^2$$

allora

$$\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to^{\mathrm{d}} N(0,1)$$

- Quindi $\frac{S_n}{n} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$ e $S_n \approx N(n\mu, \sigma^2 n)$

# Convergenza di VA

- CLT, versione “moderna”: $(X_n)_{n\geq 1}$ successione di va indipendenti con $X_n \in L^2$ per ogni $n \geq 1$,

$$E[X_n] = 0 \text{ (non restrittivo)}, \qquad \mathrm{VAR}[X_n] = \sigma_n^2$$

posto $u_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ e se la condizione di Lindeberg

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_n^2} E[X_i^2; |X_i| \geq \varepsilon u_n] = 0$$

per ogni $\varepsilon > 0$, allora

$$\frac{S_n}{u_n} \to^{\mathrm{d}} N(0,1)$$

- Basta una ipotesi di indipendenza asintotica per il teorema

# Processi Stocastici

# Processi Stocastici

- Processo stocastico
  - modello per un fenomeno aleatorio dinamico
  - dinamico: in tempo o spazio o altro
- Informazione collegata a un processo
- Categorie generali di processi
  - martingale
  - processi di Markov
- esempi importanti
  - moto Browniano
  - processo di Poisson

# Processi Stocastici

- Processo stocastico: su uno spazio $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, una famiglia di va

$$(X_\alpha)_{\alpha \in I}$$

- Tipicamente $I$: insieme di indici temporali
  - $I = \mathbb{Z}$ o $I = \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$ processo stocastico a tempo discreto; $X_n =$ valore del processo all'istante $n$
  - $I = \mathbb{R}$ o $I = [0, +\infty)$ o $I = [0, T]$ $\rightsquigarrow$ processo stocastico a tempo continuo; $X_t =$ valore del processo al tempo $t$

- ogni $X_\alpha$ è una va; oppure $X_\alpha$ vettore di $\mathbb{R}^d$ oppure in uno spazio generale $(E, \mathscr{E})$

# Processi Stocastici

- Esercizio.
  - $X_t$ prezzo azionario al tempo $t$
  - $X_t$ numero di sinistri registrato fino a $t$
  - $X_t$ danno di portafoglio cumulato fino a $t$
  - $X_t$ temperatura al tempo $t$ in una certa località
  - $X_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ temperatura in un certo istante nella latitudine $\alpha$, longitudine $\beta$, altezza dal suolo $\gamma$
  - $X_t$ rating di una compagnia al tempo $t$
  - $X_n$ tempo registrato dall'$n$-esimo atleta (in una gara)
  - ...

# Processi Stocastici

- $(X_t)_{t\geq 0}$ processo stocastico a tempo continuo
  - per ogni $t \geq 0$, $X_t$ è una va
  - per ogni $\omega \in \Omega$,
  $$t \to X_t(\omega)$$
  è una traiettoria del processo
  - spesso si richiedono proprietà aggiuntive sulle traiettorie: misurabilità, continuità (a dx, a sx), integrabilità

# Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ spazio di probabilità
  $I = [0, +\infty)$ (definizioni simili negli altri casi)
  - per ogni $t \geq 0$, sia $\mathscr{F}_t$ $\sigma$-algebra con $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$
  - $\mathscr{F}_t$: informazione disponibile al tempo $t$
  - l'informazione non viene persa: $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ se $0 \leq s < t$
- Una famiglia $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ di $\sigma$-algebre con queste caratteristiche è una filtrazione $\rightsquigarrow$ modello per il flusso di informazione; $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ è uno spazio di probabilità filtrato

# Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ spazio di probabilità filtrato; un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ è adattato alla filtrazione $(\mathscr{F}_t)$ se

$$X_t \text{ è } \mathscr{F}_t - \text{misurabile, per ogni } t \geq 0$$

  - se $0 \leq s \leq t$, $X_s$ è $\mathscr{F}_t$-misurabile $\rightsquigarrow$ $X_s$ è parte dell informazione disponibile in $t$

- Filtrazione naturale generata da un processo $(X_t)_{t\geq 0}$:

$$\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq t)$$

$\rightsquigarrow$ $\mathscr{F}_t^X$ osservazione del processo $X_u$ fino a $t$
$\rightsquigarrow$ più piccola filtrazione che rende $(X_t)$ adattato

# Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ spazio di probabilità filtrato
  il processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ è una martingala se
  1. $(X_t)$ è adattato a $(\mathscr{F}_t)$
  2. $X_t \in L^1$ per ogni $t \geq 0$
  3. per ogni $0 \leq s < t$

$$E[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s \text{ q.c.}$$

- Osservazioni
  - processo "costante in media"
  - $X_t$ = guadagno cumulato in un gioco equo
  - se (3) è sostituita da $E[X_t|\mathscr{F}_s] \geq X_s$ q.c. $\rightsquigarrow$ sottomartingala $\rightsquigarrow$ gioco favorevole
  - se (3) è sostituita da $E[X_t|\mathscr{F}_s] \leq X_s$ q.c. $\rightsquigarrow$ soopramartingala $\rightsquigarrow$ gioco favorevole

# Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ spazio di probabilità filtrato
  il processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ è Markoviano se

  1. $(X_t)$ è adattato a $(\mathscr{F}_t)$
  2. per ogni $0 \leq s < t$, per ogni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile tale che $g(X_t) \in L^1$
  $$E[g(X_t)|\mathscr{F}_s] = E[g(X_t)|X_s] \text{ q.c.}$$

- Osservazioni
  - solo il valore corrente conta per valutare il futuro
  - "futuro e passato sono indipendenti condizionatamente al presente"
  - modelli Markoviani sono "trattabili" $\rightsquigarrow$ finito dimensionali

# Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ spazio di probabilità filtrato
  $(W_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico adattato a $(\mathscr{F}_t)$ è un moto Browniano/processo di Wiener se
  1. $W_0 = 0$ q.c.
  2. le traiettorie sono continue, q.c.
  3. il processo ha incrementi indipendenti: per ogni $0 \leq s < t$
     $$W_t - W_s \text{ indipendente da } \mathscr{F}_s$$
  4. per ogni $0 \leq s < t$
     $$W_t - W_s \sim N(0, t - s)$$
- Modello base per i processi di diffusione $\rightsquigarrow$ prezzi azionari
- Il moto Browniano è una martingala e un processo di Markov

# Processi Stocastici

- $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), P)$ spazio di probabilità filtrato
  $(N_t)_{t \geq 0}$ processo stocastico adattato a $(\mathscr{F}_t)$ è un processo di Poisson omogeneo di parametro $\lambda > 0$ se
  1. $N_0 = 0$ q.c.
  2. le traiettorie sono continue, q.c.
  3. il processo ha incrementi indipendenti: per ogni $0 \leq s < t$
  $$N_t - N_s \text{ indipendente da } \mathscr{F}_s$$
  4. per ogni $0 \leq s < t$
  $$N_t - N_s \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s))$$
- Modello base per i processi di conta
- Il processo di Poisson è un processo di Markov; il processo di Poisson compensato
  $$M_t = N_t - \lambda t$$
  è una martingala