Lezione 25

Teorema di determinazione di un'applicazione lineare

Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V e $w_1, \dots, w_n \in W$ vettori arbitrari. Allora $\exists!\ f : V \to W$ lineare t.c. $f(b_j) = w_j \quad \forall j = 1, \dots, n$.

Dim Unicità. Supponiamo che tale applicazione f esista.

$\forall v \in V \ \exists!\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ t.c. $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j \implies$

$$f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(b_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j$$

Pertanto $\forall v \in V$, $f(v)$ è univocamente determinato, essendo le coordinate $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ di v rispetto a $\mathcal{B}$ uniche $\implies$ f unica.

Esistenza Definiamo $f : V \to W$ mediante la formula precedente e mostriamo che f è lineare:

$\forall v, u \in V \ \exists!\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ t.c.

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j, \quad u = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j \implies v + u = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j) b_j \implies$$

i) $$f(v+u) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j) w_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j w_j + \beta_j w_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j =$$

$$= f(v) + f(w)$$

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ si ha $\lambda v = \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda \alpha_j b_j \implies$

$$f(\lambda v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda \alpha_j w_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j = \lambda f(v).$$

Dunque f è lineare e questo dimostra l'esistenza.

Matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi

V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V $\Rightarrow \dim V = n$

$\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m)$ base per W $\Rightarrow \dim W = m$

$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i$ per certi $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $\rightsquigarrow A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

Teorema Se $v = X^{\mathcal{B}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow f(v) = Y^{\mathcal{C}}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ con:

$$\boxed{Y = AX}$$

Dim $v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \Rightarrow f(v) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(b_j) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) c_i = \sum_{i=1}^{n} y_i c_i$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = A^{(i)} X, \quad i = 1, \dots, m \Rightarrow Y = AX$$

Def A è detta matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$ per V e alla base $\mathcal{C}$ per W e si scrive $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Importante $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)$ è costruita per colonne:

$A_{(j)}$ vettore coordinate di $f(v_j)$ rispetto alla base di W.

OSS Se $A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \Rightarrow \boxed{\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A}$ e $\boxed{\operatorname{Ker} f : AX = 0_{\mathbb{K}^m}}$

OSS $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$$M^{\mathcal{E}_m}_{\mathcal{E}_n}(L_A) = A.$$

Infatti $L_A(e_j) = Ae_j = A_{(j)}$, $j = 1, \dots, n$.

OSS $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi per V, $\underset{\mathcal{B}'}{V} \xrightarrow{id_V} \underset{\mathcal{B}}{V}$, $id_V(v) = v \quad \forall v \in V$

La matrice del cambiamento di base $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ è proprio la matrice di id_V rispetto alla base $\mathcal{B}'$ nel dominio e $\mathcal{B}$ nel codominio, cioè $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V)$.

Composizione $\quad V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U \qquad f, g$ lineari

$$\begin{array}{cccl} \mathcal{B} & \mathcal{C} & \mathcal{D} & \text{basi per i rispettivi spazi} \\ (b_1, \dots, b_n) & (c_1, \dots, c_m) & (d_1, \dots, d_\ell) & \\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} & Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_\ell \end{pmatrix} & \text{coordinate} \end{array}$$

$$P = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) \qquad Q = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(g)$$

$$Y = PX \qquad Z = QY$$

$$\Rightarrow \quad Z = QY = QPX \quad \forall X \in \mathbb{K}^n \Rightarrow M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = QP$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = M^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}}(g) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)}$$

$$\boxed{\text{Composizione di applicazioni lineari}} \rightsquigarrow \boxed{\text{Prodotto righe per colonne}}$$

Cambiamento di base per applicazioni lineari

$$\begin{array}{ll} V & \mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n),\ \mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n) \text{ basi per } V \\ & \qquad X \qquad\qquad\qquad X' \\ f \downarrow & \\ & \qquad Y \qquad\qquad\qquad Y' \\ W & \mathcal{C} = (c_1, \dots, c_m),\ \mathcal{C}' = (c'_1, \dots, c'_m) \text{ basi per } W \end{array}$$

$$\underbrace{M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}(f)}_{A'} = \underbrace{M^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}}(id_W)}_{Q} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)}_{A} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V)}_{P}$$

$A, A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $Q \in GL_m(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$

Caso speciale $W = V \rightsquigarrow f : V \to V$ lineare (endomorfismo)

$$\begin{array}{cc} \mathcal{B} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}' & \mathcal{B}' \end{array}$$

$M_{\mathcal{B}}(f) := M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ <u>stessa base</u> nel dominio e nel codominio

$$P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V) \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow P^{-1} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id_V)$$

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)\, P, \quad M_{\mathcal{B}'}(f), M_{\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{K}).$$

Def Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono <u>simili</u> se $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{K})$ t.c. $B = P^{-1} A P$

Matrici simili $n \times n$	$\rightsquigarrow$	Stesso endomorfismo di V rispetto a basi diverse

Prop Matrici simili hanno lo stesso determinante.

Dim $B = P^{-1}AP \Rightarrow \det B = \det(P^{-1}AP) \underset{\text{Binet}}{=} \det(P^{-1}) \det A \det P = \frac{1}{\cancel{\det P}} \det A \cancel{\det P}$
$= \det A$.

Def $f : V \to W$ è detta:

i) iniettiva se $\forall v_1, v_2 \in V$, $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$

ii) suriettiva se $\forall w \in W\ \exists v \in V$ t.c. $f(v) = w$

iii) biiettiva se f è iniettiva e suriettiva

OSS f suriettiva $\Leftrightarrow \operatorname{im} f = W$.

Teorema $f : V \to W$ lineare. Allora f iniettiva $\Leftrightarrow \ker f = \{0_V\}$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall v \in V$, $f(v) = 0_W \Rightarrow f(v) = f(0_V) \Rightarrow v = 0_V \Rightarrow$
$\ker f = \{0_V\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall v_1, v_2 \in V$, $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0_W \Rightarrow$
$f(v_1 - v_2) = 0_W \Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker f \Rightarrow v_1 - v_2 = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2$.

OSS $f: V \to W$ lineare con $\dim V < \infty$ e $\dim W < \infty$.

i) f iniettiva $\iff \dim \ker f = 0$

ii) f suriettiva $\iff rg f = \dim W$

iii) f biiettiva $\Rightarrow \dim V = \dim W$:

$$\dim V = \dim(\ker f) + rg f \underset{(i)}{=} rg f \underset{(ii)}{=} \dim W$$

Viceversa se $\dim V = \dim W = n \Rightarrow \exists\, \mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per V
$\exists\, \mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ base per W e $\exists!\, f: V \to W$ lineare t.c.

$$f(b_j) = c_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$\Rightarrow \operatorname{im} f = \operatorname{span}(c_1, \dots, c_n) = W \Rightarrow \underbrace{rg f = n}_{\text{suriettiva}} \Rightarrow$

$$\dim(\ker f) = \dim V - rg f = 0 \quad \text{iniettiva}$$

$\Rightarrow f$ biiettiva

OSS $f: V \to W$ lineare biiettiva $\Rightarrow f^{-1}: W \to V$ lineare, $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f^{-1}) = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f)^{-1}$

Def Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Un <u>isomorfismo</u> da V a W è un'applicazione lineare e biiettiva $f: V \to W$.
Se esiste un isomorfismo $f: V \to W$ diciamo che V e W sono <u>spazi vettoriali isomorfi</u> e scriviamo $V \cong W$.

Teorema Due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V e W di dimensione finita sono isomorfi $\iff \dim V = \dim W$.

Corollario Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con $\dim V = n < \infty$.
Allora $V \cong \mathbb{K}^n$.

OSS $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per $V \rightsquigarrow \varphi: V \to \mathbb{K}^n$ $\varphi(b_i) = e_i$ $\forall i = 1, \dots, n$
isomorfismo e $\forall v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} \Rightarrow \varphi(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.