ISTANTONI in teorie di gauge non-abeliane

Tra tutti i campi (→ cammini) con winding number diverso da zero, consideriamo gli che risolvono le eq. del moto Euclidee, $D_\mu F^{\mu\nu} = 0$ $(\cdot)$

C'è un modo più semplice (rispetto a risolvere eq. diff. $(\cdot)$) per trovare config. che minimizzano S_E:

$$S_{YM} = \frac{1}{2g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad \text{(In sp. Euclideo)}$$

Ricordiamo che $\quad {*F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$

Consideriamo

$$0 \leq \int d^4x \, \mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu} \pm {*F}_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} \pm {*F}^{\mu\nu}) =$$

(uno sta con segno + e l'altro con segno −)

$$= \underbrace{2\int d^4x \, \mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})}_{\geq 0} \pm 2\underbrace{\int d^4x \, \mathrm{tr}\,(F_{\mu\nu}\, {*F}^{\mu\nu})}_{\int d^4x \, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \, = \, 32\pi^2 W}$$

$$\Downarrow$$

$$S_{YM} \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|W| \qquad \text{(Bogomolnyi BOUND)}$$

I campi che minimizzano S_{YM} saranno quelli che saturano il bound, cioè gli t.c. $S_{YM} = \frac{8\pi^2}{g^2}|W|$

$$\Rightarrow \boxed{F_{\mu\nu} = \pm {*F}_{\mu\nu}} \qquad \text{(ANTI)-SELF DUAL} \quad (\circ)$$

Qte configurazioni risolvono le eq. del moto

$$D^\mu F_{\mu\nu} \overset{(0)}{=} \pm D^\mu * F_{\mu\nu} = 0$$

Identicam. valido per le Identità di Bianchi.

Configurazioni che hanno AZIONE FINITA sono tali che

$$A_\mu(x) \to -i\, U \partial_\mu U^{-1} \quad \text{a} \quad x \to \infty \qquad U \in \Omega$$

infinito Gd

($F_{\mu\nu} \to 0$ a $x \to \infty$ affinché integrale in S_E converga

$F' = U F U^{-1}$ $\qquad A_\mu \cong 0 \Rightarrow F \cong U\, 0\, U^{-1} = 0$;

equiv. a meno di trasf. di gauge

ovviamente $F_{\mu\nu} \neq 0$ in qualche regione di $\mathbb{R}^4$,

affinché S_{YM} sia non nulla .)

⇝ Il comportamento di A_μ all'infinito è descritto da una mappa

$$U : S^3_\infty \to G$$

⇝ queste mappe sono caratterizzate dal gruppo di omotopia

$$\pi_3(G) \cong \mathbb{Z}$$

(vero $\forall G$ di Lie, eccetto $SO(4)$ $\pi_3(G) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$)

[analogo a quando abbiamo considerato $U : \mathbb{R}^3_x \to G$ $\quad U \in \Omega_x$

ma ora stiamo considerando U diverse $\qquad \mathbb{R}^3_x \cong S^3_x$

e un diverso spazio delle trasformazioni di gauge.]

Consideriamo

$$\frac{1}{32\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, d^4x = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x\ \partial_\mu K^\mu =$$

$$K^\mu = -\frac{1}{8\pi^2}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\,\mathrm{Tr}\left(A_\nu \partial_\alpha A_\beta + \frac{2}{3} A_\nu A_\alpha A_\beta\right)$$

$$= \int_{S^3_\infty} K^\perp(A)\, d^3x = \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3_\infty} \mathrm{tr}\left(U^{-1} dU\right)^3 \in \mathbb{Z}$$

it is a pure gauge on S^3_∞

$\Downarrow$

we can write the integrand in terms of U_∞

$$\Big[\ K \propto AdA + \frac{2}{3}A^3 = U^{-1} dU\, dU^{-1} dU + \frac{2}{3}\left(U^{-1} dU\right)^3 =$$

$$= -U^{-1} dU\, U^{-1} dU\, U^{-1} dU + \frac{2}{3}\left(U^{-1} dU\right)^3 = -\frac{1}{3}\left(U^{-1} dU\right)^3$$

$$A = U^{-1} dU \qquad 0 = d\left(U^{-1}U\right) = dU^{-1}U + U^{-1}dU$$

$$\rightarrow dU^{-1} = -U^{-1} dU\, U^{-1} \ \Big]$$

Consideriamo le connessioni con w fissato
(cioè tutte le connessioni con $w = \frac{1}{16\pi^2} \int tr\, F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}$)

ci interessa trovare il minimo di S_{YM} in pto classe, cioè config. t.c.

$$F_{\mu\nu} = \pm * F_{\mu\nu}$$

Qte config. sono chiamate ISTANTONI
(sono localizzate attorno un pto di $\mathbb{R}^4$)

Contribuiscono al P.I. con un FATTORE CARATTERISTICO

$$e^{-S_{inst}} = e^{-\frac{8\pi^2 |w|}{g^2}} e^{i\theta w}$$

reale perché siamo in segnatura Euclidea

rimane complesso anche in segnatura Euclidea

SINGOLO ISTANTONE in SU(2)

Consideriamo $G = SU(2)$. Vogliamo risolvere l'eq

$$F_{\mu\nu} = * F_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad w = 1$$

Asintoticamente A_μ deve tendere a una pura gauge, cioè

$$A_\mu(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} -i\, U(x)\, \partial_\mu U^{-1}(x)$$

dipende dalle coord angolari $\frac{x^\mu}{\sqrt{x^2}}$

Espandiamo $U(x) = \frac{x_\mu \sigma^\mu}{\sqrt{x^2}}$ $\quad \sigma^\mu = (\mathbb{1}, -i\vec{\sigma})$
(σ^0, σ^i)

Allora $A_\mu(x) = -i\, f(x)\, U \partial_\mu U^{-1}$ dove $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$

Prendiamo $f(x) = \frac{x^2}{x^2+\rho^2}$ e verifichiamo che A_μ corrisponde

risolve l'eq. $F_{\mu\nu} = *F_{\mu\nu}$.

Useremo: $\sigma^\mu \bar\sigma^\nu = \delta^{\mu\nu}\mathbb{1} + \underbrace{\Sigma^{\mu\nu}_\rho \sigma^\rho}_{\equiv \Sigma^{\mu\nu}}$ dove Σ è antisim. e self-duale

c.c. di σ^ν

Antisim.: $\sigma^i\bar\sigma^j = \sigma^i_p\sigma^j_p = \delta^{ij}\mathbb{1} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k_p$

$\sigma^0\bar\sigma^j = \bar\sigma^j = i\sigma^j_p$

$\sigma^j\bar\sigma^0 = \sigma^j = -i\sigma^j_p$

$\sigma^0\bar\sigma^0 = \mathbb{1}$

$\Sigma^{ij}_0 = 0 \quad \Sigma^{ij}_k = -\epsilon^{ijk}$

$\Sigma^{0j}_0 = 0 \quad \Sigma^{j0}_k = \delta^j_k = -\Sigma^{0j}_k$

$\Sigma^{\mu\nu}$: $\Sigma^{ij} = i\epsilon^{ijk}\sigma^k_p$

$\Sigma^{i0} = -i\sigma^i_p$

Self-duale: $\Sigma'^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}$

$\Sigma'^{01} = \frac{1}{2}\epsilon^{01\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\times\epsilon^{0123}\Sigma^{23} = \underset{1}{\epsilon^{0123}}\, i\,\underset{1}{\epsilon^{231}}\sigma^1_p = i\sigma^1_p = \Sigma^{01}$ ($\mu\nu$: 23, 32)

$\Sigma'^{12} = \frac{1}{2}\epsilon^{12\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}2\times\epsilon^{1230}\Sigma^{30} = -\epsilon^{123}(-i)\sigma^3_p = \Sigma^{12}$ ($\mu\nu$: 30, 03)

$$\underset{U^\dagger}{U\partial_\mu U^{-1}} = \frac{x_\nu\sigma^\nu}{\|x\|}\partial_\mu\left(\frac{x_\rho\bar\sigma^\rho}{\|x\|}\right) = \frac{x_\nu\sigma^\nu}{\|x\|}\left\{\frac{\bar\sigma^\mu}{\|x\|} - \frac{x_\rho\bar\sigma^\rho}{\|x\|^3}x^\mu\right\} =$$

$$= \frac{1}{\|x\|^2}\left\{x_\nu(\delta^{\mu\nu}+\Sigma^{\nu\mu}) - \underbrace{\overbrace{x_\nu x_\rho}^{x^2}}_{\text{sym.}}\left(\delta^{\nu\rho} + \underbrace{\cancel{\Sigma^{\nu\rho}}}_{=0}\right)\frac{x_\mu}{\|x\|^2}\right\}$$

elides

$$\cancel{x_\mu} + x_\nu\Sigma^{\nu\mu} - \cancel{x_\mu}$$

$$= \frac{x_\nu\Sigma^{\nu\mu}}{x^2}$$

$$A_\nu(x) = -i\frac{x_\alpha\Sigma^{\alpha\nu}}{x^2+\rho^2}$$

$\hookrightarrow F_{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu A_\nu = -i\frac{\Sigma_{\mu\nu}}{x^2+\rho^2} + i\frac{x_\alpha \Sigma^{\alpha\nu}}{(x^2+\rho^2)^2}\, 2x_\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -\frac{2i\Sigma_{\mu\nu}}{x^2+\rho^2} + \frac{2i}{(x^2+\rho^2)^2}\left(x_\mu x_\alpha \Sigma_{\alpha\nu} - x_\nu x_\alpha \Sigma_{\alpha\mu}\right)$$

$$= \frac{2i}{x^2+\rho^2}\left(-\Sigma_{\mu\nu} + \frac{1}{x^2+\rho^2}\left(\underline{x_\mu x_\alpha \Sigma_{\alpha\nu}} - \underline{x_\nu x_\alpha \Sigma_{\alpha\mu}}\right)\right)$$

Per calcolare $i[A_\mu, A_\nu]$ usiamo la seguente proprietà:

$$[\Sigma_{\alpha\mu}, \Sigma_{\beta\nu}] = 2\delta_{\alpha\nu}\Sigma_{\mu\beta} + 2\delta_{\mu\beta}\Sigma_{\alpha\nu} - 2\delta_{\alpha\beta}\Sigma_{\mu\nu} - 2\delta_{\mu\nu}\Sigma_{\alpha\beta}$$

$$i[A_\mu, A_\nu] = -\frac{i}{(x^2+\rho^2)^2}\left[x_\alpha \Sigma_{\alpha\mu}, x_\beta \Sigma_{\beta\nu}\right] =$$

$$= \frac{2i\, \underbrace{x_\alpha x_\beta}_{\text{sym}}}{(x^2+\rho^2)^2}\left(\delta_{\alpha\beta}\Sigma_{\mu\nu} + \cancel{\delta_{\mu\nu}\underbrace{\Sigma_{\alpha\beta}}_{\text{antisym.}}} - \delta_{\alpha\nu}\Sigma_{\mu\beta} - \delta_{\mu\beta}\Sigma_{\alpha\nu}\right)$$

$$= \frac{2i}{(x^2+\rho^2)^2}\left(x^2\Sigma_{\mu\nu} + \underline{x_\nu x_\beta \Sigma_{\beta\mu}} - \underline{x_\mu x_\alpha \Sigma_{\alpha\nu}}\right)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] = -\frac{2i}{x^2+\rho^2}\Sigma_{\mu\nu}\left(1 - \frac{x^2}{x^2+\rho^2}\right)$$

$$= -\frac{2i\,\rho^2}{(x^2+\rho^2)^2}\Sigma_{\mu\nu}$$

localizzato attorno $x=0$ con un'ampiezza $\sim \rho$

self-duale $\Rightarrow$ $F_{\mu\nu}$ è self-duale, cioè minimizza S_{YM}

Calcoliamo il winding number w.

$$\mathrm{Tr}\left(\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\right) = 2\,\mathrm{Tr}\Big(\underset{i=1,2,3}{\Sigma_{0i}^2} + \underset{ij=12,23,31}{\Sigma_{ij}^2}\Big) = -6\,\mathrm{Tr}(\mathbb{1}_2+\mathbb{1}_2) = -24$$

$$\Sigma_{\mu\nu}^2 = -\mathbb{1}$$

$$\underbrace{\epsilon^{ijk}\epsilon^{ijh}}_{\delta^{kh}}(i\sigma_p^k)(i\sigma_p^h) = -\mathbb{1}_2$$

$$w = \frac{1}{16\pi^2}\int \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}\,{*F_{\mu\nu}}\right) = \frac{1}{16\pi^2}\int \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) =$$

self-duale

$$= \frac{1}{16\pi^2}\mathrm{Tr}\left(\Sigma_{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\right)\int d^4x\,\frac{(-2i)^2\rho^4}{(x^2+\rho^2)^4} =$$

$$= \frac{+\cancel{24}^{\,6}\cdot(+\cancel{4})\,\rho^4}{4\,\cancel{16}\pi^2}\underbrace{\int d^4x\,\frac{1}{(x^2+\rho^2)^4}}$$

$$\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(k^2+a^2)^A} = \frac{\Gamma(A-d/2)}{(a^2)^{A-d/2}(4\pi)^{d/2}\Gamma(A)} \Rightarrow \int\frac{d^4x}{(x^2+\rho^2)^4} = \frac{\Gamma(4-2)(\cancel{2}\pi)^4}{(\rho^2)^{4-2}(\cancel{4}\pi)^2\,\Gamma(4)}$$

$d=4 \quad A=4 \quad a=\rho$

$\Gamma(n+1)=n! \Rightarrow \Gamma(2)=1$
$\Gamma(4)=3!$

$$w = \frac{6\rho^4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^4}{\rho^4\pi^2\,3!} = 1$$

Per $|w|>1$ la soluzione è molto più complicata.
Però c'è un'approssimazione (approx. di gas diluito)

$$A_{\mu\nu}^{w=1}\Big|_{x=x_1} + A_{\mu\nu}^{w=1}\Big|_{x=x_2} \simeq A_{\mu\nu}^{w=2}$$

se $\|x_1-x_2\| \gg \rho$

→ Nota: le soluzioni istantoniche contengono dei parametri ↕ "zero modi"

⇝ famiglia di soluzioni

es. $w=1$ $\qquad f(x) = \dfrac{(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2+\rho^2}$ $\qquad$ i parametri sono x_0, ρ

Mostriamo ora che la soluz. istantonica trovata (con $w=1$) è un cammino in $Q = \mathcal{A}/\Omega_*$ e in particolare un loop con winding number 1.

↓

Prima di tutto ci mettiamo nella gauge $A_0=0$. La soluz. istant. trovata non è in tale gauge → dobbiamo applicare una trasf. di gauge per portare $A_0 \to A_0=0$.

$$A_0 = -i\,\frac{x_\alpha \underbrace{\Sigma^{\alpha 0}}_{\text{antisim}}}{x^2+\rho^2} = -i\,\frac{x_i \overbrace{\Sigma^{i0}}^{-\frac{i}{2}\sigma_i}}{x^2+\rho^2} = -\frac{\bar{x}\cdot\underbrace{\bar{\sigma}}_{\text{matrici di Pauli}}}{x^2+\rho^2}$$

Consideriamo la trasf. di gauge $W = e^{-i\frac{\bar{x}\cdot\bar{\sigma}}{|\bar{x}|}\zeta(x)}$

dove $\zeta(x) = -\dfrac{|\bar{x}|}{\sqrt{|\bar{x}|^2+\rho^2}}\left(\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x_0}{\sqrt{\bar{x}^2+\rho^2}}\right)\right)$

- $\partial_0 \zeta = -\dfrac{|\bar{x}|}{\sqrt{\bar{x}^2+\rho^2}}\;\dfrac{1}{1+\dfrac{x_0^2}{\bar{x}^2+\rho^2}}\;\dfrac{1}{\sqrt{\bar{x}^2+\rho^2}} = -\dfrac{|\bar{x}|}{\underbrace{x^2}_{x_0^2+\bar{x}^2}+\rho^2}$

- $\partial_0 W^{-1} = +W^{-1}\, i\,\dfrac{\bar{x}\cdot\bar{\sigma}}{|\bar{x}|}\,\dfrac{|\bar{x}|}{x^2+\rho^2}$

- $W\,\bar{x}\cdot\bar{\sigma}\,W^{-1} = \bar{x}\cdot\bar{\sigma}$ (commutano)

- $W \xrightarrow[x_0\to-\infty]{} \mathbb{1} \qquad W \xrightarrow[x_0\to+\infty]{} e^{+i\pi\frac{\bar{\sigma}\cdot\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2+\rho^2}}} = -\widetilde{W}(\bar{x})$

$$\to A_0' = \underbrace{W A_0 W^{-1}}_{= A_0} - i W \partial_4 W^{-1} = -\frac{\bar{x}\cdot\bar{\sigma}}{x^2+\rho^2} + i \cancel{W W^{-1}} (-i) \frac{\bar{x}\cdot\bar{\sigma}}{x^2+\rho^2} = 0$$

$$A_i' = W A_i W^{-1} - i W \partial_i W^{-1}$$

Cammino nella gauge $A_0' = 0$ è descritto dalle funz.

$A_i'(\bar{x}, x_0)$ $\longleftrightarrow$ $\gamma^\mu(t)$ in sp. $\mathbb{R}^4$ (per esempio)

analogo

$\uparrow$ parametro della curva

$\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \longrightarrow Q = \mathcal{A}/\Omega_*$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$\uparrow$ parametrizzato da $A_i'(\bar{x})$

Vediamo cosa succede agli estremi:

$$A_i'(x_4 \to -\infty) = A_i(\bar{x}) \qquad (*)$$

$$A_i'(x_4 \to +\infty) = \tilde{W} A_i \tilde{W}^{-1} - i \tilde{W} \partial_i \tilde{W}^{-1} = A_i^{\tilde{W}}(\bar{x})$$

Questo è un loop in $Q = \mathcal{A}/\Omega_*$ se $\tilde{W} \in \Omega_* = \{ \text{mapping } g : \mathbb{R}^3 \to G$ t.c. $g \xrightarrow[\bar{x}\to\infty]{} \mathbb{1} \}$

$$\tilde{W} = -e^{i\pi \frac{\bar{\sigma}\cdot\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2+\rho^2}}} \xrightarrow[\bar{x}\to\infty]{} -e^{+i\pi\, \bar{\sigma}\cdot\hat{x}} = -\left(\cos(\pi)\,\mathbb{1} + i \sin(\pi)\,\bar{\sigma}\cdot\hat{x}\right)$$

$$= \mathbb{1} \qquad \Rightarrow \tilde{W} \in \Omega_*$$

$$\frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2+\rho^2}} \to \frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \equiv \hat{x}$$

$\Rightarrow$ $(*)$ è un loop in Q

$\rightsquigarrow$ uno può provare che il winding number calcolato con $\tilde{W}$ è $= 1$!

$\downarrow$

Dato un campo $A_\mu(x_0,\bar{x})$ e quindi un campo con parametro x_4

$$\frac{1}{16\pi^2}\int \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} = w[\tilde{W}]$$

winding number

SU(2)

$A_\mu \longleftrightarrow n \in \pi_3(S^3)$

S^3 a $x_0^2+\bar{x}^2 \to \infty$

$\downarrow$

SU(2)

cammino def da $\tilde{W}$ $\longleftrightarrow n \in \pi_3(S^3)$

$S^3 = \mathbb{R}^3_{\bar{x}}$ compattif.