

# Geometria 3 – Topologia

## Foglio di esercizi 10

- 1) Per ogni  $A \subset X$  poniamo  $X/A := X/(a \sim b \ \forall a, b \in A)$ , cioè lo spazio quoziente ottenuto da  $X$  schiacciando  $A$  in un punto. Dimostrare che  $B^n/S^{n-1} \cong S^n$ .
- 2) Sia  $f: S^n \rightarrow X$  continua. Dimostrare che  $f \simeq$  costante se e solo se  $f$  ammette un'estensione continua  $\tilde{f}: B^{n+1} \rightarrow X$ .
- 3) Sia  $\Gamma \subset RP^2$  una conica non degenera (e non vuota) e sia  $L \subset RP^2$  una retta proiettiva. Dimostrare che  $\Gamma \cong L$  ma non esiste nessun omeomorfismo  $f: RP^2 \rightarrow RP^2$  tale che  $f(\Gamma) = L$ .
- 4) Mostrare che l'applicazione  $\varphi: CP^1 \rightarrow CP^2$ ,  $\varphi([x_0, x_1]) = [x_0^2, x_0x_1, x_1^2]$  è ben definita, è un'immersione e ha come immagine una conica non degenera ( $\varphi$  è detta immersione di Veronese). Concludere che le coniche non degeneri in  $CP^2$  sono omeomorfe a  $CP^1$  e dunque a  $S^2$ . Suggerimento<sup>1</sup>.
- 5) Dimostrare che  $RP^2$  si immerge in  $R^4$ . Suggerimento<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Usare la classificazione proiettiva delle coniche.

<sup>2</sup> $RP^2 \cong Mb \cup_{\partial} B^2$ .