Lezione 1 dicembre 22

giovedì 1 dicembre 2022 09:23

POSIZIONI TRA RETTE, PIANI

RETTE PIANE

2 rette : r e r' $\subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

Eq. parametriche:

τ tau τ

r: $\begin{cases} x = q_1 + \ell t \\ y = q_2 + m t \end{cases}$ r': $\begin{cases} x = q_1' + \ell' \tau \\ y = q_2' + m' \tau \end{cases}$

$Q = (q_1, q_2)$ $Q' = (q_1', q_2')$

$W_r = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}\right)$ $W_{r'} = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} \ell' \\ m' \end{pmatrix}\right)$

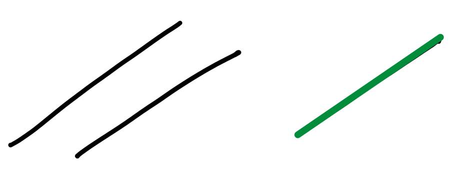
$r \parallel r'$: $W_r = W_{r'} \iff \begin{pmatrix} \ell \\ m \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \ell' \\ m' \end{pmatrix}$ sono proporzionali

$\iff rg\begin{pmatrix} \ell & \ell' \\ m & m' \end{pmatrix} = 1$

$\iff \det\begin{pmatrix} \ell & \ell' \\ m & m' \end{pmatrix} = 0$

$\iff \boxed{\ell m' - \ell' m = 0}$

Abbiamo 2 casi:



rette parallele "vere"

rette coincidenti

Rette coincidenti $\iff r \cap r' \neq \emptyset$

$\iff \exists\, \bar{t},\ \exists\, \bar{\tau}$ t.c.

$$\begin{cases} q_1 + \ell \bar{t} = q_1' + \ell' \bar{\tau} \\ q_2 + m \bar{t} = q_2' + m' \bar{\tau} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \ell t - \ell' \tau = q_1' - q_1 \\ m t - m' \tau = q_2' - q_2 \end{cases} \quad (*)$$

$r \cap r' \iff$ il SL $(*)$ è compatibile

$A = \begin{pmatrix} \ell & -\ell' \\ m & -m' \end{pmatrix}$

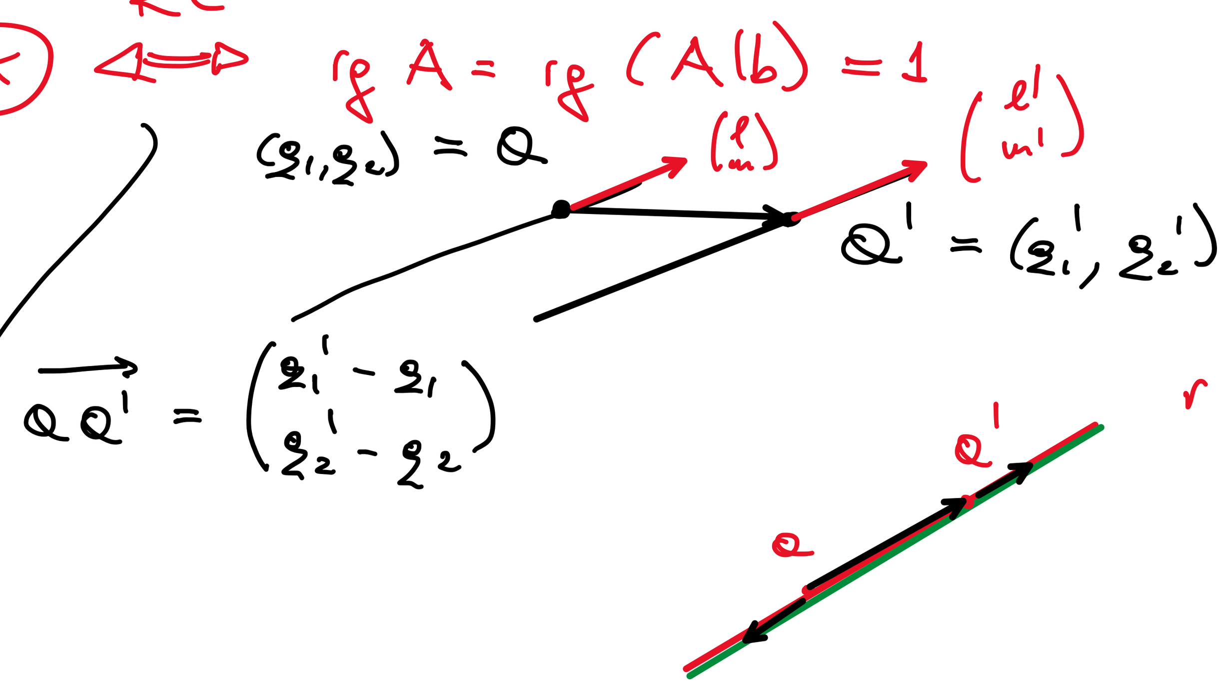
$(A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} \ell & -\ell' & q_1' - q_1 \\ m & -m' & q_2' - q_2 \end{array}\right)$ $(**)$

$rg\begin{pmatrix} \ell & \ell' \\ m & m' \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} \ell & -\ell' \\ m & -m' \end{pmatrix} = 1$

cioè colonne proporzionali

le colonne ancora proporzionali

$(*) \overset{RC}{\iff} rg\,A = rg\,(A|b) = 1$



RC: $rg\,A = rg\,(A|b) = 1$

e l'insieme delle soluzioni è SSA

di dimensione: $n - rg(A) = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow$ è una retta affine.

Incidenza tra r e r': $r \nparallel r'$

r: $\begin{cases} x = q_1 + \ell t \\ y = q_2 + m t \end{cases}$ r': $\begin{cases} x = q_1' + \ell' \tau \\ y = q_2' + m' \tau \end{cases}$

$r \nparallel r'$: $\iff rg\begin{pmatrix} \ell & \ell' \\ m & m' \end{pmatrix} = 2$

vediamo se si intersecano:

$\begin{cases} \ell t - \ell' \tau = q_1' - q_1 \\ m t - m' \tau = q_2' - q_2 \end{cases}$ è compatibile?

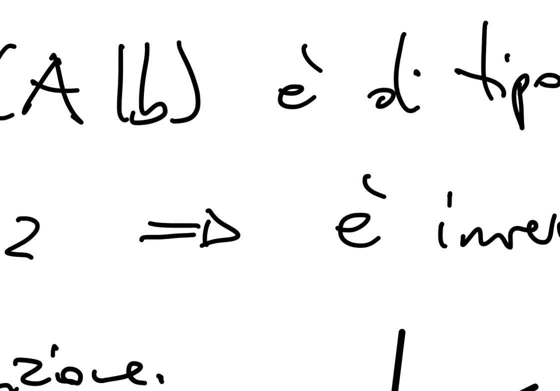
$$\left(\begin{array}{cc|c} \ell & -\ell' & q_1' - q_1 \\ m & -m' & q_2' - q_2 \end{array}\right)$$

$rg = 2$

D'altra parte $(A|b)$ è di tipo 2×3

A è 2×2, di $rg\,2 \Rightarrow$ è invertibile

$\Rightarrow$ Teo. di Cramer $\exists!$ soluzione.

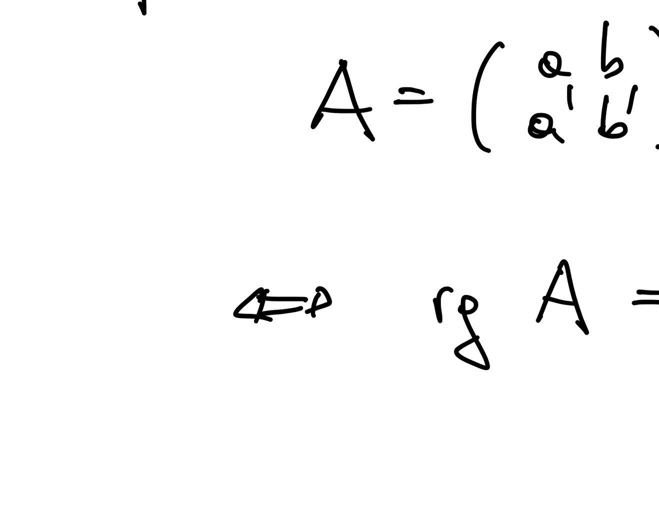


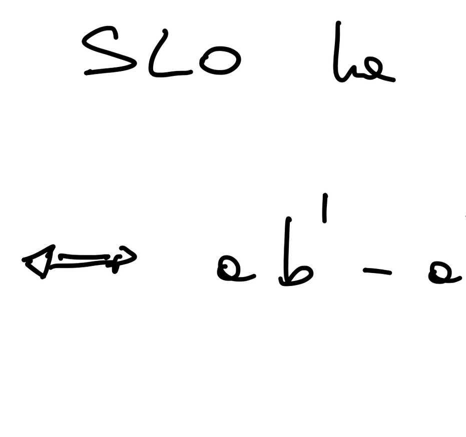
CON EQUAZIONI CARTESIANE

r: $ax + by = c$ r': $a'x + b'y = c'$

$W_r: ax + by = 0$ $W_{r'}: a'x + b'y = 0$

$W_r = W_{r'} \iff \begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases}$ SLO





$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, SLO ha ∞ soluzioni

$\iff rg\,A = 1 \iff ab' - a'b = 0$

IN PARICOLARE : r: $y = mx + q$ r': $y = m'x + q'$

$mx - y = -q$ $m'x - y = -q'$

$A = \begin{pmatrix} m & -1 \\ m' & -1 \end{pmatrix}$, $\det A = m \cdot (-1) - m'(-1)$

$= -m + m' = 0$

$\iff m = m'$