Lezione 5 dicembre 22

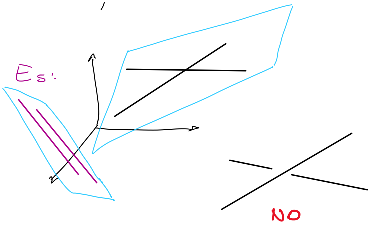
lunedì 5 dicembre 2022 08:10

RETTE in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$: COMPLANARITÀ

Def. : Due rette $r, r' \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ sono complanari se $\exists$ un piano $H \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ t.c.

$r \subseteq H$, e $r' \subseteq H$.

Es:



OSS: Siano r e r' date da eq. parametriche:

$$r : \begin{cases} x = q_1 + lt \\ y = q_2 + mt \\ z = q_3 + nt \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = q_1' + l'\tau \\ y = q_2' + m'\tau \\ z = q_3' + n'\tau \end{cases}$$

$Q = (q_1, q_2, q_3)$ $\qquad$ $Q' = (q_1', q_2', q_3')$

se $\exists$ $H \supseteq r \cup r'$

in particolare: $W_H \supseteq W_r \cup W_{r'}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \in W_H$, $\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix} \in W_H$

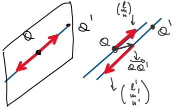
$Q \in H$, $Q' \in H$

$\Rightarrow \overrightarrow{QQ'} \in W_H$

$\Rightarrow$ se $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{QQ'}$ sono LIN. INDIP. $\Rightarrow$ W_H non esiste

(piano vettoriale)

Se invece $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QQ'}$ sono lin DIP., il piano vettoriale W_H esiste e vediamo come trovarlo.

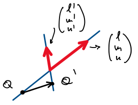

Q
Q'
$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$
Q
Q'
$\overrightarrow{QQ'}$
$\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$

$\exists$ ∞ piani H

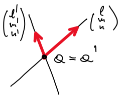
i 3 vettori sono LIN. DIP.

e $W_H = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \overrightarrow{QQ'}\right)$

H : prendo Q (o Q')


$\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$
Q
Q'

i 3 vettori sono lin. dipendenti


$\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$
Q = Q'

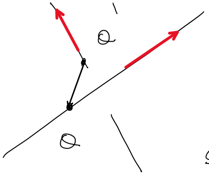
posso cambiare punti Q e Q', e supporre che siano coincidenti

$\Rightarrow \overrightarrow{QQ'} = \vec{0}$

vettore nullo

$W_H = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}\right)$

H : punto base Q

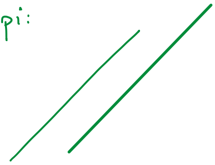


$\overrightarrow{QQ'}$, $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$

sono LIN. INDIPENDENTI
(dalle tabelle di discussione)

Esempi:

①



$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$$

$Q = (1, 2, 0)$

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$Q' = (0, 3, 1)$

$$r': \begin{cases} x = 2\tau \\ y = 3 - 2\tau \\ z = 1 + 2\tau \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{QQ'} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 3 - 2 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono proporziali $\Rightarrow$ $r \parallel r'$

parallele vere? $Q \overset{?}{\in} r'$?

Sì!

$$\begin{cases} 1 = 2\tau \\ 2 = 3 - 2\tau \\ 0 = 1 + 2\tau \end{cases} \Rightarrow \tau = \frac{1}{2}$$

$0 \neq 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$
$\neq 2$

$$H: \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t + (-1) \cdot s \\ y = 2 + (-1) \cdot t + 1 \cdot s \\ z = 0 + 1 \cdot t + 1 \cdot s \end{cases}$$

$$W_H = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \overrightarrow{QQ'}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = 2 - t + s \\ z = t + s \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 1 = t - s \\ y - 2 = -t + s \\ z = t + s \end{cases}$$

eq. cart.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & x - 1 \\ -1 & 1 & y - 2 \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = 0$$

$$(x-1)(-1-1) - (y-2)(1\cdot 1 + 1\cdot 1) + z(1-1) = 0$$

$$-2(x-1) - 2(y-2) = 0 \quad /:(-2)$$

$$x-1+y-2=0$$

$$\boxed{x+y=3} \qquad H$$

VERIFICA: $r \subseteq H$?

il generico punto di r ha coordinate

$(1+t,\ 2-t,\ t)$:

$$(1+t)+(2-t)=3 \ !$$

$r' \subseteq H$?

gen. punto di r' ha coord: $(2\tau,\ 3-2\tau,\ 1+2\tau)$

$$2\tau + (3-2\tau) = 3 \ !$$

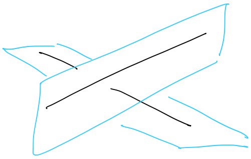
CRITERIO DI COMPLANARITÀ:

$$\det\begin{pmatrix} l & l' & q_1'-q_1 \\ m & m' & q_2'-q_2 \\ n & n' & q_3'-q_3 \end{pmatrix} = 0$$

CRITERIO DI SGHEMBITÀ

$$\det\begin{pmatrix} l & l' & q_1'-q_1 \\ m & m' & q_2'-q_2 \\ n & n' & q_3'-q_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

oss.



$\exists$ 2 piani paralleli: $H \supseteq r$

$H' \supseteq r'$

$H \parallel H'$

ANNUNCIO: il TUTORATO

di DOMANI 6/12/2022

E' CANCELLATO per malattia!

* * *

TRASFORMAZIONI o APPLICAZIONI LINEARI DI SV

Siano V e V' SV su $\mathbb{K}$

Def.: Una funzione $f: V \longrightarrow V'$

si dice APPLIC. LINEARE se:

(AL1) ADDITIVITA':

$$f(\underbrace{v_1 + v_2}_{\text{in } V}) = \underbrace{f(v_1) + f(v_2)}_{\text{in } V'}$$

$\forall\, v_1, v_2 \in V$

(AL2) OMOGENEITA'

$$f(\underline{c\,v}) = \underline{c \cdot f(v)}$$

$\forall\, v \in V, \ \forall\, c \in \mathbb{K}$

DEF.: $f: V \longrightarrow V$ (se $V' = V$)

allora f si dice ENDOMORFISMO

oppure OPERATORE LINEARE

OSS.: ① $f(0_V) = 0_{V'}$

infatti: $0_V = 0 \cdot v, \quad v \in V$

$$f(0_V) = f(0 \cdot v) \underset{\substack{\downarrow \\ AL2}}{=} 0 \cdot f(v) = 0_{V'}$$

② : Possiamo sommare e moltiplicare

per uno scalare le AL:

$$f: V \to V', \quad g: V \to V'$$

$$f+g: V \to V'$$

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v) \in V'$$

$$c \cdot f: V \to V'$$

$$(cf)(v) := c \cdot f(v) \in V'$$

e con QUESTE OPERAZIONI

l'insieme delle AL è SV su $\mathbb{K}$

(verifica 8 assiomi) : $\mathcal{L}(V, V')$

opp. $\mathrm{Hom}(V, V')$

OSS.: L'applicazione lineare costante

NULLA:

$$f: V \to V'$$

$$f(v) = 0_{V'} \quad \forall v \in V$$

è AL, ed è l'elemento neutro per

Esempi:

① : Sia $\underset{m \times n}{A} \in M_{\boxed{m},\boxed{n}}(\mathbb{K})$

e cons. la MOLTIPLICAZIONE per A:

$$L_A : \mathbb{K}^{\boxed{n}} \longrightarrow \mathbb{K}^{\boxed{m}}$$

$$L_A(v) := \overset{m \times n}{A} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{prodotto RC}}}{\cdot} \overset{n \times 1}{v} \quad \in \overset{m \times 1}{\mathbb{K}^m}$$

affermo L_A è una AL:

$$\boxed{\text{AL1}} \quad L_A(v_1 + v_2) = A \cdot (v_1 + v_2) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{DISTRIBUTIVITÀ}}}{=} A \cdot v_1 + A \cdot v_2 = L_A(v_1) + L_A(v_2)$$

$$\boxed{\text{AL2}} \quad L_A(c \cdot v) = A \cdot (c \cdot v) = c\,(A \cdot v) = c \cdot L_A(v)$$

Esempi di L_A :

ROTAZIONI DEL PIANO:

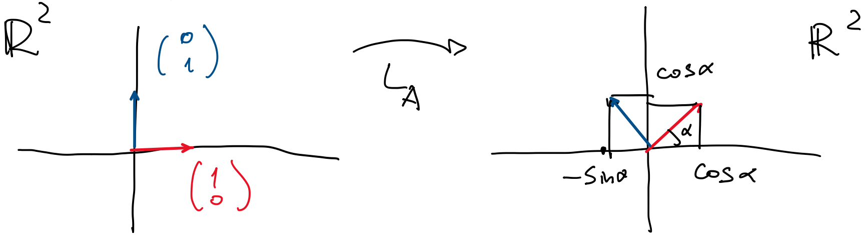
Cons. $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$L_A(v)$, $v =$

$L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ROTAZ. ANTIORARIA DI Angolo α

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

ad esempio $L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$



$$L_A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Esempio: FUNZIONE COORDINATE:

Sia V sv, e fisso $\mathcal{B}$ base di V

$\mathcal{B} = \{v_1, .., v_n\}$

$F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$

$F_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

si può verificare che F_B è AL

ed è biiettiva ; in questo caso si dice

ISOMORFISMO : $V \cong \mathbb{K}^n$: $\mathbb{K}^n$ è modello numerico per V

Esercizio: Se $f : V \longrightarrow V'$ è AL

ed è BIIETTIVA $\Longrightarrow$ $f^{-1} : V' \longrightarrow V$

è ancora AL.

Esempio : ③

Cons. $C^1((a,b), \mathbb{R})$ = funzioni derivabili su (a,b) con derivata continua

$C^0((a,b), \mathbb{R})$ = funzioni continue su (a,b)

visto: $C^1((a,b), \mathbb{R})$ è $\mathbb{R}$-SV

$C^0((a,b), \mathbb{R})$ è $\mathbb{R}$-SV

$$D : C^1((a,b), \mathbb{R}) \longrightarrow C^0((a,b), \mathbb{R})$$

$$D(f) := f' \quad \text{derivata}$$

è AL ?

$$D(f+g) = D(f) + D(g)$$

$$(f+g)' = f' + g' \quad ? \quad \text{sì!}$$

$$D(c \cdot f) = c \cdot D(f)$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

VEDREMO : ogni AL $f : V \to V'$ con V e V' di dimensione finita, può essere rapp. dalla molt. per una matrice