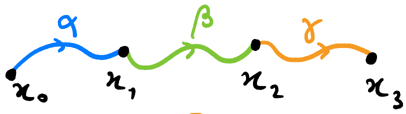
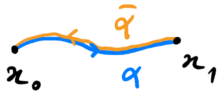
Lezione 21 — Gruppo fondamentale

Lemma Sia X uno spazio e siano $\alpha, \beta, \gamma : I \to X$ cammini con $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = \beta(0) = x_1$, $\beta(1) = \gamma(0) = x_2$, $\gamma(1) = x_3$. Allora valgono le seguenti omotopie rel $\{0,1\}$:

i) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) \simeq (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$;

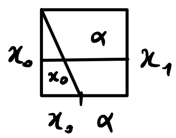


ii) $\alpha \cdot \bar{\alpha} \simeq x_0$ e $\bar{\alpha} \cdot \alpha \simeq x_1$;



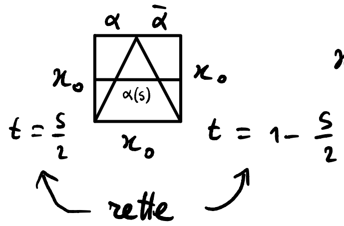
iii) $\alpha \cdot x_1 \simeq \alpha \simeq x_0 \cdot \alpha$

Dim iii)



$x_0 \cdot \alpha \simeq \alpha$

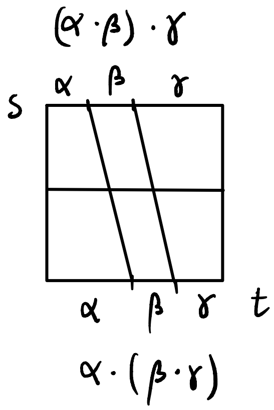
ii)



$x_0 \simeq \alpha \cdot \bar{\alpha}$

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(s) & \frac{s}{2} \leq t \leq 1 - \frac{s}{2} \\ \bar{\alpha}(2t-1) & 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

i)



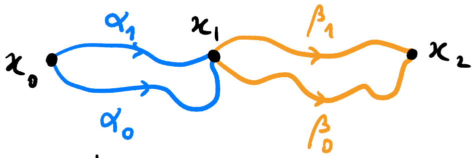
si definisce l'omotopia

$$H : I \times I \to X$$

seguendo i disegni e usando le rette oblique per definire gli intervalli per t e la velocità.

Lemma Siano $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 : I \to X$ cammini t.c.
$\alpha_0(0) = \alpha_1(0) = x_0$, $\alpha_0(1) = \alpha_1(1) = \beta_0(0) = \beta_1(0) = x_1$, $\beta_0(1) = \beta_1(1) = x_2$.
Se $\alpha_0 \simeq \alpha_1$ e $\beta_0 \simeq \beta_1$ (rel $\{0,1\}$) allora $\alpha_0 \cdot \beta_0 \simeq \alpha_1 \cdot \beta_1$ (rel $\{0,1\}$).

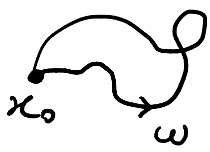
Dim $H, K : I \times I \to X$ omotopie rel $\{0,1\}$



$h_0 = \alpha_0$, $h_1 = \alpha_1$, $k_0 = \beta_0$, $k_1 = \beta_1$ $\rightsquigarrow$ $H \cdot K$ omotopie cercate.
prodotto di omotopie

Def Sia X uno spazio e $x_0 \in X$. Un <u>cappio</u> in X basato in x_0 è un cammino $\omega : I \to X$ t.c. $\omega(0) = \omega(1) = x_0$

L'insieme dei cappi in X basato in x_0 si denota



$$\Omega(X, x_0) := \{ \omega : I \to X \mid \omega \text{ continua}, \omega(0) = \omega(1) = x_0 \}$$

e si chiama <u>spazio dei cappi</u>. x_0 è detto <u>punto base</u>.

OSS $\simeq_{\{0,1\}}$ è una relazione d'equivalenza su $\Omega(X, x_0)$. Si ha:

$\forall\ \omega_0, \omega_1 \in \Omega(X, x_0)$, $\omega_0 \simeq_{\{0,1\}} \omega_1 \iff \exists\ H : I \times I \to X$ omotopia (rel $\{0,1\}$) t.c. $h_0 = \omega_0$, $h_1 = \omega_1$, $H(0,s) = H(1,s) = x_0 \quad \forall s \in I$.

Def Sia X uno spazio topologico e $x_0 \in X$ un punto base. L'insieme quoziente

$$\pi_1(X, x_0) := \Omega(X, x_0) / \simeq_{\{0,1\}}$$

è detto <u>gruppo fondamentale</u> di (X, x_0).

OSS Gli elementi di $\pi_1(X, x_0)$ sono classi $[\omega]$ con $\omega \in \Omega(X, x_0)$.

Teorema $\pi_1(X, x_0)$ è un gruppo con l'<u>operazione binaria</u>

$$[\omega] \cdot [\gamma] := [\omega \cdot \gamma] \quad \forall\ [\omega], [\gamma] \in \pi_1(X, x_0).$$

L'<u>elemento neutro</u> è la classe del cappio costante $1 := [x_0]$.

L'<u>inverso</u> di $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ è $[\omega]^{-1} := [\overline{\omega}]$.

Dim $[x_0] \in \pi_1(X, x_0) \neq \emptyset$

L'operazione è ben definita in virtù del 2° lemma (non dipende dai rappresentanti).

Il 1° lemma implica che è associativa, $1 = [x_0]$ è elemento neutro, $[\omega]^{-1} = [\overline{\omega}]$. Questo conclude la dimostrazione.

Teorema Siano X e Y spazi, $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Sia
$$f: X \to Y$$
un'applicazione continua t.c. $f(x_0) = y_0$. Allora l'applicazione
$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$$
$$f_*([\omega]) := [f \circ \omega]$$
è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi.

Def f_* è detto <u>omomorfismo indotto da f</u>.

Dim $\omega \simeq_{\{0,1\}} \omega' \Rightarrow \exists\, H : I \times I \to X$ omotopia rel $\{0,1\}$ t.c. $h_0 = \omega$, $h_1 = \omega'$, $h_s(0) = h_s(1) = x_0$ $\forall s \in I$ $\rightsquigarrow$ $K := f \circ H : I \times I \to Y$ omotopia rel $\{0,1\}$ t.c. $k_0 = f \circ \omega$, $k_1 = f \circ \omega'$ $\Rightarrow$ f_* ben definita. Mostriamo che è omomorfismo.

$$f_*([\omega]\cdot[\gamma]) = f_*([\omega \cdot \gamma]) = [f \circ (\omega \cdot \gamma)]$$
$$f_*([\omega]) \cdot f_*([\gamma]) = [f \circ \omega] \cdot [f \circ \gamma] = [(f \circ \omega) \cdot (f \circ \gamma)]$$

Si verifica subito che $f \circ (\omega \cdot \gamma) = (f \circ \omega) \cdot (f \circ \gamma) \Rightarrow$
$$f_*([\omega]\cdot[\gamma]) = f_*([\omega]) \cdot f_*([\gamma]) \quad \forall [\omega], [\gamma] \in \pi_1(X, x_0).$$

OSS $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$

Teorema di funtorialità Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono continue e t.c. $f(x_0) = y_0$ e $g(y_0) = z_0 \Rightarrow (g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Dim $(g \circ f)_*([\omega]) = [(g \circ f) \circ \omega] = [g \circ (f \circ \omega)] = g_*(f_*([\omega]))$ $\forall [\omega] \in \pi_1(X, x_0)$.

Corollario $f : X \to Y$ omeomorfismo, $f(x_0) = y_0 \Rightarrow$

$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ isomorfismo di gruppi.

Inoltre $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.

Dim $f \circ f^{-1} = id_Y \Rightarrow (f \circ f^{-1})_* = f_* \circ (f^{-1})_* = id_{\pi_1(Y, y_0)}$

$f^{-1} \circ f = id_X \Rightarrow (f^{-1} \circ f)_* = (f^{-1})_* \circ f_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$

$\Rightarrow (f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$ e f è un isomorfismo.

Oss $\pi_1(X, x_0)$ è un invariante topologico.