Lezione 26

$f, g : V \to W$ lineari $\rightsquigarrow$ $f+g : V \to W$ lineare

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$$

$\alpha \in \mathbb{K}$, $f : V \to W$ lineare $\rightsquigarrow$ $\alpha f : V \to W$ lineare

$$(\alpha f)(v) := \alpha f(v)$$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Hom}(V, W) := \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare} \}$

$\mathbb{K}$-spazio vettoriale delle applicazioni lineari $V \to W$.

$\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V) = \{ f : V \to V \mid f \text{ lineare} \}$

$\mathbb{K}$-spazio vettoriale degli endomorfismi di V.

Se $\dim V = n < \infty$, $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$ basi per V

$A = M_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$, $P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V)$ $\rightsquigarrow$ $A' = P^{-1} A P$

Def Si chiama determinante di $f \in \mathrm{End}(V)$, con $\dim V < \infty$, lo scalare $\det f := \det M_{\mathcal{B}}(f)$, dove $\mathcal{B}$ è una base qualunque di V.

Oss 1) La definizione è ben data perché $\det M_{\mathcal{B}}(f)$ non dipende dalla base $\mathcal{B}$ per V (matrici simili hanno lo stesso det).

2) $\ker f \neq \{0_V\} \iff \det f = 0$.

Problema Data $f : V \to V$ lineare, esiste una base per V

$$\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$$

t.c. $M_{\mathcal{U}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

sia una matrice diagonale? R. Non sempre!

Si dovrà quindi avere $f(u_i) = \lambda_i u_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathcal{U}}$

Questo porta alla definizione seguente.

Def Sia $f : V \to V$ un endomorfismo del $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V.
Un <u>autovettore di f</u> è un vettore <u>non nullo</u> $v \in V$ t.c.

$$f(v) = \lambda v$$

per un certo scalare $\lambda \in \mathbb{K}$. Un tale λ è detto <u>autovalore di f</u>.

OSS 1) $v \in V - \{0_V\}$ autovettore di $f \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ t.c.

$$f(v) = \lambda v$$

2) $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di $f \iff \exists\, v \in V - \{0_V\}$ t.c.

$$f(v) = \lambda v.$$

Si dice che v è autovettore relativo a λ.

3) Un autovalore può essere nullo, ma un autovettore no!

Es 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad L_A(e_1) = 0_{\mathbb{R}^2} = 0\, e_1$

$\Rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ autovalore di L_A e e_1 autovettore relativo a 0

$L_A(e_2) = 2e_2 \Rightarrow 2$ autovalore di L_A e e_2 è un autovettore.

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_B(e_1) = e_1 + e_2 \Rightarrow e_1$ non è autovettore.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $f : V \to V$ un endomorfismo.
Supponiamo $\dim V < \infty$. Allora $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $f \iff$

$$\det(f - \lambda\, \mathrm{id}_V) = 0.$$

Dim $f - \lambda\, id_V \in End(V)$ (è combinazione lin. di f e id_V).

$\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore di $f \iff \exists\, v \in V,\ v \neq 0_V$ t.c.

$f(v) = \lambda v \iff f(v) - \lambda v = 0_V \iff (f - \lambda\, id_V)(v) = 0_V$

$\iff \ker(f - \lambda\, id_V) \neq \{0_V\} \iff \det(f - \lambda\, id_V) = 0.$

Def Data $f \in End(V)$ poniamo

$$p_f(x) := \det(f - x\, id_V).$$

p_f è detto <u>polinomio caratteristico di f</u>.

Per calcolare p_f consideriamo una base qualunque $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ per V e sia $A = M_{\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice di f rispetto a $\mathcal{B}$.

$M_{\mathcal{B}}(id_V) = I_n$ dato che $id_V(b_j) = b_j \quad \forall j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(f - x\, id_V) = A - x I_n \Rightarrow$

$$p_f(x) = \det(A - x I_n)$$

Def Data $A \in M_n(\mathbb{K})$ poniamo

$$p_A(x) := \det(A - x I_n).$$

p_A è il polinomio caratteristico di A.

Si ha dunque $p_f = p_A$ dove $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.

OSS Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow p_A(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} - x \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$ <u>$p_A(x)$ polinomio di grado n a coefficienti in $\mathbb{K}$.</u>

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1.$

Corollario $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $f \in End(V) \iff p_f(\lambda) = 0$
$\iff \lambda$ è radice del polinomio caratteristico di f.

Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ gli autovalori / autovettori di $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ sono anche detti autovalori / autovettori di A.

Nell'esempio di prima troviamo gli autovalori di A risolvendo

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Prima di cercare gli autovettori osserviamo che se $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di $f : V \to V$ allora $v \in V - \{0_V\}$ è autovettore relativo a $\lambda \iff v \in \ker(f - \lambda\, id_V) - \{0_V\}$.

Def Sia $f \in End(V)$ e sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di f.
Il sottospazio vettoriale

$$Aut(\lambda) := \ker(f - \lambda\, id_V) \subset V$$

è detto <u>autospazio</u> di λ.

<u>Oss</u> 1) $Aut(\lambda) \subset V$ è sottospazio vettoriale in quanto nucleo dell'endomorfismo $f - \lambda\, id_V$

2) λ autovalore di $f \Rightarrow \dim Aut(\lambda) \geq 1$.

3) $Aut(\lambda) = \{ v \in V \mid v \text{ è autovettore relativo a } \lambda \} \cup \{0_V\}$
gli autovettori sono per definizione $\neq 0_V$

Quindi gli autovettori relativi a λ sono i vettori non nulli di $\ker(f - \lambda\, id_V)$. Se $\mathcal{B}$ è base per V, $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, per trovare gli autovettori basta risolvere il sistema lineare

$$(A - \lambda I_n)\, X = 0_{\mathbb{K}^n}$$

per ciascun autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$.

Nell'esempio di prima $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ $\quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad x + \sqrt{2}\, y = 0$

equazioni proporzionali

$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ base per $Aut(1-\sqrt{2})$

$\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$ $\quad \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad x - \sqrt{2}\, y = 0$

$u_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ base per $Aut(1+\sqrt{2})$

Pertanto posto $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ base per $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$M_{\mathcal{U}}(L_A) = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{matrice diagonale.}$$

Def Un endomorfismo $f \in End(V)$ è <u>diagonalizzabile</u> se esiste una base $\mathcal{U}$ per V t.c. $M_{\mathcal{U}}(f)$ sia una matrice diagonale.

Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è <u>diagonalizzabile</u> se L_A lo è.

Corollario $f \in End(V)$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists\, \mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ base per V fatta di autovettori di f.

In pratica si cercano tutti gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ e per ciascuno di essi si cerca una base di $Aut(\lambda_i)$.

f diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ le basi degli autospazi formano base per V.