Sviluppo in serie di funzioni elementari

sviluppo in serie di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

- **f(x)** è una funzione derivabile almeno **n** volte in $\boldsymbol{x_0}$
- $\boldsymbol{o((x - x_0)^n)}$ è detto resto di Peano e si legge: o piccolo di $(x - x_0)^n$
- o piccolo è un infinitesimo di ordine superiore a $(x - x_0)^n$, cioè: $\lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0$

algebra degli o piccoli: per $\boldsymbol{x \to 0}$ si ha:

$o(x^m) \pm o(x^m) = o(x^m)$	$o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$	$o(x^m) + o(x^n) = o\left(x^{\boldsymbol{min}\{m,n\}}\right)$	$x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

se $x_0 = 0$ si ha lo sviluppo in serie di Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}\,(x)^n + o(x^n)$$

sviluppo in serie di Mac Laurin di funzioni elementari

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}\,x^n + o(x^n)$	funzione potenza con $\alpha \in \mathbb{R}$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\,x^{n+1} + o(x^{n+1})$	funzione radice quadrata
$a^x = 1 + x\,ln\,a + \frac{x^2}{2}ln^2 a + \frac{x^3}{3!}ln^3 a + \cdots + \frac{x^n}{n!}ln^n a + o(x^n)$	funzione esponenziale con base a
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$	funzione esponenziale con base e
$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$	funzione logaritmo in base e
$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$	funzione seno
$cosx = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$	funzione coseno
$tgx = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10})$	funzione tangente
$cotgx = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2}{945}x^5 + o(x^6)$	funzione cotangente
$secx = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^7)$	funzione secante
$cosecx = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + o(x^6)$	funzione cosecante
$arcsenx = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n)!}{4^n\,(n^2)!\,(2n+1)}\,x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$	funzione arcoseno
$arccosx = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \cdots - \frac{(2n)!}{4^n\,(n^2)!\,(2n+1)}\,x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$	funzione arcocoseno
$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	funzione arcotangente
$arccotgx = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \cdots - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$	funzione arcocotangente