Lezione 22

Teorema $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Dim $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t} = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$

rivestimento, $1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ punto base, $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

$\varphi : \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z}$

$\varphi([\omega]) := \tilde{\omega}_0(1)$ con $\tilde{\omega}_j : I \to \mathbb{R}$ sollevamento di ω t.c. $\tilde{\omega}_j(0) = j \in \mathbb{Z}$

p periodica di periodo $1 \Rightarrow \tilde{\omega}_j = \tilde{\omega}_0 + j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

0) Sollevamento delle omotopie $\Rightarrow$ φ ben definita

$\omega \simeq_{\{0,1\}} \omega'$, $H : I \times I \to S^1$ omotopia rel $\{0,1\}$, $h_0 = \omega$, $h_1 = \omega'$

$\rightsquigarrow \tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ sollevamento di H, $\tilde{H}(0,0) = 0$ omotopia rel $\{0,1\}$

$\tilde{h}_0 = \tilde{\omega}_0$, $\tilde{h}_1 = \tilde{\omega}'_0$, $\tilde{H}(1,s) = \tilde{\omega}_0(1) = \tilde{\omega}'_0(1) \quad \forall s \in I$.

1) φ omomorfismo $\forall [\omega], [\gamma] \in \pi_1(S^1)$ si ha:

$$\varphi([\omega]\cdot[\gamma]) = \varphi([\omega\cdot\gamma]) = (\widetilde{\omega\cdot\gamma})_0(1) = (\tilde{\omega}_0 \cdot \tilde{\gamma}_{\tilde{\omega}_0(1)})(1) =$$

$$= \tilde{\gamma}_{\tilde{\omega}_0(1)}(1) = \tilde{\gamma}_0(1) + \tilde{\omega}_0(1) = \varphi([\omega]) + \varphi([\gamma])$$

2) φ iniettiva $[\omega] \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \tilde{\omega}_0(1) = 0 \Rightarrow \tilde{\omega}_0$ cappio

$H : I \times I \to \mathbb{R}$, $H(t,s) = s\,\tilde{\omega}_0(t)$ omotopia rel $\{0,1\}$

$h_0 = 0$, $h_1 = \tilde{\omega}_0 \rightsquigarrow K = p \circ H : I \times I \to S^1$ omotopia rel $\{0,1\}$

$k_0 = 1$, $k_1 = \omega \Rightarrow [\omega] = 1 \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{1\}$.

3) $\underline{1 \in \operatorname{im} \varphi}$ infatti $\omega : I \to S^1$, $\omega(t) = e^{2\pi i t} = p(t)$

$\rightsquigarrow \varphi([\omega]) = \tilde{\omega}_0(1) = 1$ perché $\tilde{\omega}_0(t) = t$.

4) $\operatorname{im} \varphi \subset \mathbb{Z}$ sottogruppo, $1 \in \operatorname{im} \varphi \Rightarrow \operatorname{im} \varphi = \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\underline{\varphi \text{ suriettiva}} \Rightarrow \underline{\varphi \text{ isomorfismo}}$.

<u>OSS</u> $\omega_n : I \to S^1$, $\omega_n(t) = e^{2\pi i n t} = p(nt) \Rightarrow \varphi([\omega_n]) = n$.

<u>Teorema d'invarianza omotopica</u> Siano $f, g : X \to Y$ continue con $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Supponiamo $f \simeq g$ (rel $\{x_0\}$). Allora $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

<u>Dim</u> $H : X \times I \to Y$ omotopia rel $\{x_0\}$, $h_0 = f$, $h_1 = g$.

$\forall [\omega] \in \pi_1(X, x_0)$ si ha: $f_*([\omega]) = [f \circ \omega]$

$g_*([\omega]) = [g \circ \omega]$

Definiamo $K : I \times I \to Y$, $K(t,s) := H(\omega(t), s)$

$K_0 = f \circ \omega$, $K_1 = g \circ \omega$, $K(0,s) = H(x_0, s) = y_0$

$K(1,s) = H(x_0, s) = y_0$

$f \circ \omega \simeq_{\{0,1\}} g \circ \omega \Rightarrow f_*([\omega]) = g_*([\omega]) \quad \forall [\omega] \in \pi_1(X, x_0)$

$\Rightarrow f_* = g_*$.

<u>OSS</u> I cappi e le omotopie tra cappi basati in x_0 assumono valori in $\mathcal{P}_{x_0}(X) \Rightarrow \pi_1(X, x_0) = \pi_1(\mathcal{P}_{x_0}(X), x_0)$ dipende solo dalla componente connessa per archi di x_0.

E' quindi naturale chiedersi in che modo $\pi_1(X, x_0)$ dipenda da x_0 se X è connesso per archi.

Teorema di dipendenza dal punto base Sia X uno spazio e sia $\alpha : I \to X$ un cammino con $\alpha(0) = x_0$, $\alpha_1 = x_1$. Allora l'applicazione $\alpha_* : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$,

$$\alpha_*([\omega]) := [\alpha \cdot \omega \cdot \bar{\alpha}]$$

è ben definita ed è un isomorfismo di gruppi. Si ha:

i) $x_{0*} = id$ dove x_0 è il cammino costante

ii) $(\alpha \cdot \beta)_* = \alpha_* \circ \beta_*$ $\forall$ $\alpha, \beta : I \to X$ cammini t.c. $\alpha(1) = \beta(0)$

iii) $(\alpha_*)^{-1} = \bar{\alpha}_*$

iv) $\alpha_0 \simeq_{\{0,1\}} \alpha_1 \Rightarrow \alpha_{0*} = \alpha_{1*}$.

Dim 2° lemma $\Rightarrow$ α_* ben definita e (iv).

1° lemma $\Rightarrow$ (i)

ii) $(\alpha \cdot \beta)_*([\omega]) = [(\alpha \cdot \beta) \cdot \omega \cdot \overline{(\alpha \beta)}] = [\alpha \cdot \beta \cdot \omega \cdot \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha}] =$

$= \alpha_*([\beta \cdot \omega \cdot \bar{\beta}]) = \alpha_*(\beta_*([\omega]))$ $\forall [\omega] \in \pi_1(X, x_0)$

iii)
$$\left.\begin{aligned} id_{\pi_1(X,x_0)} &= x_{0*} = (\alpha \cdot \bar{\alpha})_* = \alpha_* \circ \bar{\alpha}_* \\ id_{\pi(X,x_1)} &= x_{1*} = (\bar{\alpha} \cdot \alpha)_* = \bar{\alpha}_* \circ \alpha_* \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{\alpha}_* = (\alpha_*)^{-1}$$

$$\alpha_*([\omega] \cdot [\gamma]) = \alpha_*([\omega \cdot \gamma]) = [\alpha \cdot (\omega \cdot \gamma) \cdot \bar{\alpha}] =$$

$$= [\alpha \cdot \omega \cdot \underbrace{\bar{\alpha} \cdot \alpha}_{\substack{\simeq x_0 \\ \text{lemmi}}} \cdot \gamma \cdot \bar{\alpha}] = [\alpha \cdot \omega \cdot \bar{\alpha}] \cdot [\alpha \cdot \gamma \cdot \bar{\alpha}] =$$

$$= \alpha_*([\omega]) \cdot \alpha_*([\gamma]) \quad \forall\ [\omega], [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$$

$\Rightarrow$ α_* omomorfismo.

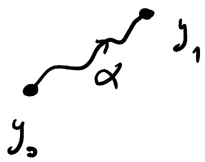
Corollario Se X è connesso per archi allora $\pi_1(X, x_0)$ non dipende dal punto base x_0 a meno di isomorfismi. Scriviamo anche $\pi_1(X) := \pi_1(X, x_0)$ con x_0 sottinteso.

Teorema Siano $f, g : X \to Y$ continue, $f(x_0) = y_0$, $g(x_0) = y_1$.
Se $f \simeq g \Rightarrow f_* = \alpha_* \circ g_*$, dove $\alpha : I \to Y$ è un certo cammino da y_0 a y_1, $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_1)$.

Dim $H : X \times I \to Y$ omotopia, $h_0 = f$, $h_1 = g$

$\alpha : I \to Y$, $\alpha(s) := H(x_0, s)$ $\forall s \in I$

$\forall [\omega] \in \pi_1(X, x_0) \rightsquigarrow K : I \times I \to Y$



$$K(t,s) = H(\omega(t), s)$$

$K_0 = f \circ \omega$, $K_1 = g \circ \omega$, $K(0,s) = K(0,1) = \alpha(s)$

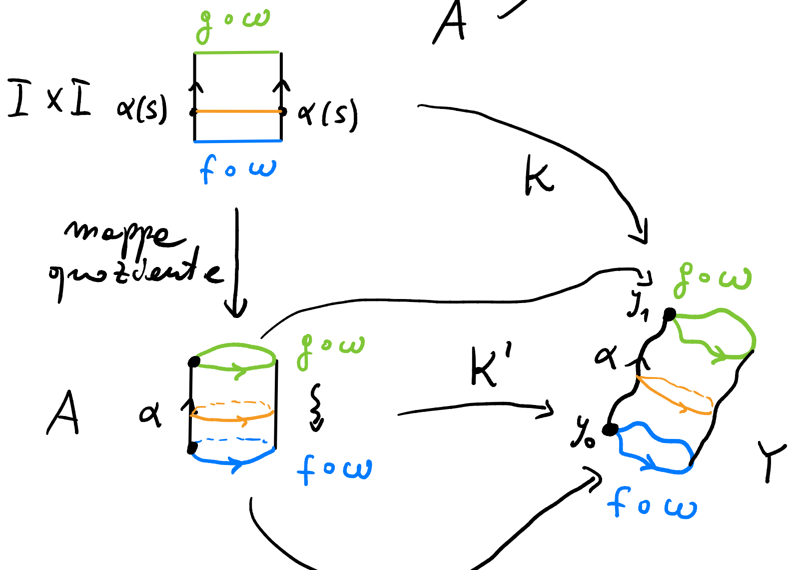
K non è omotopia rel $\{0,1\}$ e va modificata.

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "K"] \arrow[d, "L"'] & Y \\ A \arrow[ur, "K'"'] & \end{tikzcd}$$

$A = (I \times I) / ((0,s) \sim (1,s) \ \forall s \in I) \cong S^1 \times I$

K passa al quoziente $\rightsquigarrow K' : A \to Y$

$$K'([(t,s)]) = K(t,s)$$



$f \circ \omega \simeq_{\{0,1\}} \alpha \cdot (g \circ \omega) \cdot \bar{\alpha}$

$\Rightarrow f_*([\omega]) = \alpha_*(g_*([\omega]))$

$\forall [\omega] \in \pi_1(X, x_0) \Rightarrow$

$f_* = \alpha_* \circ g_*$

Oss $\alpha_* : \pi_1(Y, y_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$

Se $f \simeq g$ allora f_* isomorfismo $\Leftrightarrow g_*$ isomorfismo