Corso di ISTITUZIONI DI ALGEBRA E GEOMETRIA
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università degli Studi di Trieste
Prof. Fabio Perroni

Foglio di esercizi n. 6

1. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva algebrica di grado n. Si dimostri che $\mathcal{C}$ ha al più $\frac{n(n-1)}{2}$ punti singolari.
(Suggerimento: si proceda per induzione sul numero delle componenti.)

2. Sia $\mathcal{C} = V(F) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una curva algebrica, con F polinomio minimo. Sia $L \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ una retta non contenuta in $\mathcal{C}$, sia $\varphi \colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to L$ una parametrizzazione (lineare) di L. Sia $p = \varphi([\lambda_0 : \mu_0]) \in \mathcal{C} \cap L$ un punto di intersezione tra $\mathcal{C}$ ed L tale che $p \notin \mathrm{Sing}(\mathcal{C})$. Si dimostri la seguente uguaglianza:

$$\mathrm{mult}_p(\mathcal{C} \cap L) = \mathrm{ord}_{[\lambda_0:\mu_0]}(F \circ \varphi)\,.$$

3. Dato un polinomio $F \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_r]$, la *matrice hessiana* associata ad F, $\mathbb{H}_F \in \mathrm{M}_{(r+1)^2}(\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_r])$, si definisce come la matrice il cui elemento di posto (i, j) è la derivata parziale $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$. Il *determinante hessiano* di F, $\mathcal{H}_F$ si definisce come $\det(\mathbb{H}_F)$.

Sia $M \in \mathrm{M}_{r+1}(\mathbb{C})$ una matrice e sia $L_M \colon \mathbb{C}^{r+1} \to \mathbb{C}^{r+1}$ l'endomorfismo associato, $L_M(x) = M \cdot x$. Si provino le seguenti uguaglianze:

$$\mathbb{H}_{F \circ L_M} = {}^t M \mathbb{H}_F M\,, \qquad \mathcal{H}_{F \circ L_M} = (\det(M))^2 \mathcal{H}_F\,.$$

4. Nel piano proiettivo complesso $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con coordinate omogenee $[x : y : z]$ si consideri la seguente cubica:

$$\mathcal{C} = V(y^2 z - x^3 - z^3)\,.$$

(a) Si provi che $\mathcal{C}$ non è singolare e si determinino i suoi flessi.

(b) Si scriva $\mathcal{C}$ in forma di Legendre.