Dirac quantization condition

Consideriamo un MONOPOLO MAGNETICO, cioè oggetto che è sorgente di un campo magnetico

$$\bar{B} = \frac{q_m \hat{r}}{4\pi r^2} \qquad \text{t.c.} \quad \int_{S^2} \bar{B} \cdot d\bar{\Sigma} = \underset{\text{"carica magnetica"}}{q_m}$$

→ modifica di legge di Maxwell $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$

↑ di solito qsta è considerata "non negoziabile". Infatti, se $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} \neq 0 \rightarrow \bar{B} \neq \bar{\nabla} \times \bar{A}$ e $\bar{A}$ necessario per descriz. (quant.) di particelle in campo magnetico

Ma qto non è completam. vero

↳ posso def. un $\bar{A}$ su tutti pti $\neq$ da pto cui esiste q_m e MQ è ben def. (Vedi DIRAC MONOPOLE)

Vediamo come def. questo campo $\bar{A}$. Innanzitutto escludiamo l'origine dal dominio di $\bar{A}(x)$ (like gauge fields sourced by electric charge)

$$\bar{A} : \underbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}_{\text{some non-trivial topology}} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Prendiamo campo $\bar{A}$ con $\quad A_\phi^N = \frac{q_m}{4\pi r} \frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad (\circ) \qquad A_r = 0 = A_\theta$

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(A_\phi \operatorname{sen}\theta \right) \hat{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\underbrace{r A_\phi}_{\text{it does not depend on } r} \right) \hat{\theta} \overset{!}{=} \frac{q_m \hat{r}}{4\pi r^2}$$

$(\circ)$ è singolare a $\theta = \pi$, cioè al polo sud.

La connessione $\quad A_\phi^S = -\frac{q_m}{4\pi r} \frac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \quad$ è regolare a $\theta = \pi$, ma sing. a $\theta = 0$

Come possiamo dare una connessione ben definita su tutto $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

↳ notiamo che $\bar{A}^N = \bar{A}^S + \bar{\nabla}\omega$, cioè sono gauge equiv.

per $\theta \neq 0, \pi$ dove almeno una delle due connessioni è mal def,

$$A_\phi^N = A_\phi^S + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi \omega \quad \text{dove} \quad \omega = \frac{q_m \phi}{2\pi}$$

permette di "incollare" le due connessioni

È lecita qta trasf. di gauge?

La funzione ω non è single-valued, è un problema?

Sotto gauge transf. $\varphi \mapsto \underbrace{e^{iq_e\omega}}_{\text{qto deve essere single-valued}}\varphi$

avviene se $\frac{q_e q_m \cdot \cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}} = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Dirac quantiz. condition: $q_e \cdot q_m \in 2\pi\mathbb{Z}$

(Matem.: costruzione di un $U(1)$-bundle non-triviale; n è chiamato 1st Chern number.)

't Hooft Lines in Elettromagnetismo

Prendiamo un MONOPOLO che percorre cammino C in $\mathbb{R}^{3,1}$. Per ogni S^2 che circonda C abbiamo

$$\int_{S^2} \bar{B}\cdot d\bar{\Sigma} = q_m \quad (*) \qquad q_m \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{(DIRAC QUANTIZATION)}$$

se cariche elettriche normalizzate a essere intere.

Affinché A_μ soddisfi qta equaz. dobbiamo imporre condizioni al bordo singolari per A_μ

Definiamo l'operatore "'t Hooft line" $T[C]$ imponendo che i campi su cui facciamo il Path Integral soddisfino la condizione $(*)$.

def. inusuale per un operatore, ma questo ci permette comunque di calcolare le funz. di correlaz. di $T[C]$ con ogni altro op. O

$$\langle T[C]\, O \rangle = \int_{A \text{ satisfy } (*)} O(A)\, \mathcal{D}A$$

't Hooft lines in Yang-Mills

- Consideriamo curva di tipo tempo C, che passa per origine
- $B^i = \epsilon^{0ijk} F_{jk}$ soddisfa $B^i \to \frac{x^i}{4\pi r^3} Q(x)$ per $r \to 0$

In Adj di $\mathfrak{g}$ (gruppo G)

a valori nell'alg. di Lie

specifica la "carica magnetica"

Di nuovo copriamo S^2 con due carte e prendiamo $Q(x)$ cost. in ogni carta (simmetria sferica richiede che $Q(x)$ sia cov. cost.), che possiamo ruotare a un elem. della sottoalg. di Cartan

$$Q = \bar{q}_m \cdot \bar{H} \qquad q_m^i \to \text{cariche magnetiche} \qquad i = 1, \dots, r \quad \bar{H} = (H^1, \dots, H^r)$$

base di Cartan subalg.

Le H^i generano sottogruppi $U(1)$, che avranno associate cariche ELETTRICHE, cioè autovalori di H^i (weights)

La richiesta che le linee di 't Hooft siano consist. con la presenza di "cariche elettriche", cioè Wilson lines

$\to$ Dirac quant. cond: $\exp(\bar{q} \cdot \bar{H}) = \mathbb{1}$ $\quad \forall R$ in cui mettiamo gen. Hi

Es. $SU(2)$. Cartan subalg. è 1-dim. e genera $U(1) \subset SU(2)$

$$H = \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix} \qquad A_\mu^a T^a = A_\mu^H H + W_\mu^+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + W_\mu^- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[H, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left[H, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i bosoni $W_\pm$ hanno carica $q_e = \pm 1$ rispetto a Cartan:

in rep. Adj $\quad H_{Adj} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ sembra che $q_m = 2\pi \mathbb{Z}$ da Dirac quant. cond.

Ma se mettiamo Wilson line in rep. FONDAM. $\quad H_F = \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad q_m = 4\pi \mathbb{Z}$ invece di $2\pi \mathbb{Z}$

non compatib. con Dirac quant. cond.

I weights e le roots hanno la proprietà

$$\frac{2\bar{\alpha}\cdot\bar{\mu}}{\bar{\alpha}^2} \in \mathbb{Z} \qquad (*)$$

Usiamolo per risolvere Dirac quantiz. cond.,

cioè $\quad \bar{q}_m \cdot \bar{\mu} \in 2\pi \mathbb{Z} \qquad \forall \bar{\mu} \in \Lambda_w(\mathcal{G})$

Def. "co-root" $\quad \bar{\alpha}^\vee = \dfrac{2\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}^2} \rightsquigarrow$ spannano reticolo $\Lambda_{co\text{-}root}(\mathcal{G})$

$(*) \Rightarrow \quad \bar{\alpha}^\vee \cdot \bar{\mu} \in \mathbb{Z} \quad \forall\, \bar{\alpha}^\vee \in \Lambda_{co\text{-}root}(\mathcal{G})$ e $\bar{\mu}$ weight

$\rightarrow$ Se il vett. delle cariche magn. $\bar{q}_m$ sta in $\Lambda_{co\text{-}root}(\mathcal{G})$

$\Rightarrow$ la cond. di quant. di Dirac è soddisfatta:

$$\bar{q}_m \in 2\pi\, \Lambda_{co\text{-}root}(\mathcal{G}) \quad \leftarrow \text{"GNO quantization condition"}$$

Goddard-Nuyts-Olive

$\Lambda_{co\text{-}root}(\mathcal{G})$ può essere visto come root lattice per un'alg. di Lie $\mathcal{G}^\vee$: $\Lambda_{co\text{-}root}(\mathcal{G}) = \Lambda_{root}(\mathcal{G}^\vee)$

Per ADE $\quad \mathcal{G}^\vee = \mathcal{G}$

$SU(N)$ vs $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ $\qquad$ $SU(2)$ vs $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$

Wilson lines labelled da reps R

't Hooft lines " da elem. di $\Lambda_{\text{co-root}}(G) \subset \Lambda_w(g^\vee)$

Consideriamo YM con $G = SU(N)$.

A_μ e Adj $\rightarrow$ non sentono trasf. del centro $\mathbb{Z}_N \subset SU(N)$

$$\mathbb{Z}_N = \{ e^{2\pi i k/N} \mathbb{1} \mid k = 0, 1, \dots, N-1 \}$$

Abbiamo stesso spettro di bosoni di gauge se $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$.

In generale, ci sono DIVERSE TEORIE di GAUGE con gruppi

$$G = SU(N)/\mathbb{Z}_p \qquad \mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Z}_N$$

La differenza è sottile:

- l'azione dip dall'alg. di Lie, che è la stessa per i due gruppi
- $\langle \mathcal{O} \cdots \mathcal{O} \rangle$ con $\mathcal{O}$ op. locali sono le stesse nelle due teorie $\rightarrow$ non si distingue tra le due con local expec.

Vediamo le WILSON LINES: esse sono labellate da reps di G.

- Le rep di $SU(N)/\mathbb{Z}_N$ sono un sottoinsieme di quelle di $SU(N)$
  $\rightarrow$ ogni rep che trasforma in maniera non triviale sotto $\mathbb{Z}_N$ è proibita (due elem. equivalenti non possono agire in maniera diversa)

qto limita il numero di Wilson lines.

Se abbiamo meno rep., stiamo escludendo weights $\vec{\mu}$ e quindi aumentiamo il numero di cariche magnetiche ammissibili

In particolare per $SU(N)$ $\quad g = g^\vee$ cioè $\Lambda_{co\text{-}root} = \Lambda_{root}$

$G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ $\quad \bar{\mu}$ stanno in Λ_{root} $\Rightarrow$ $\bar{q}_m$ stanno ora in Λ_w

- C'è una corrispondenza 1 a 1 tra reps e pti in $\Lambda_w(g)/W$ dove W è il Weyl group (un gruppo discreto che agisce su H^* e che è dato per ogni alg. di Lie).

- Inoltre $\Lambda_w(g)/\Lambda_{root}(g) = \underset{\uparrow\ \text{centro}}{\mathbb{Z}_N}$

$\downarrow$

I pesi (mod Weyl) che non stanno nel root lattice possono essere labellati da un intero $z^e \in \{0,1,\dots,N-1\}$

$\longrightarrow$ per questi ci sono WL, ma non TL in $SU(N)$

Analogamente per $SU(N)/\mathbb{Z}_N$, i pesi a cui posso associare TL ma non WL sono labellati da $z^m \in \{0,1,\dots,N-1\}$

Prendiamo come es. $SU(6)$; qui posso fare diverse scelte di gruppo di gauge

$SU(6)$ $\quad \bar{\mu} \in \Lambda_w \quad \bar{q}_m \in \Lambda_{root}$

$\left.\begin{matrix} SU(6)/\mathbb{Z}_2 \\ SU(6)/\mathbb{Z}_3 \end{matrix}\right\}$ $\quad \bar{\mu} \in \Lambda_e \quad \bar{q}_m \in \Lambda_m \leftarrow$ Qui non ho che un reticolo è incluso nell'altro, ma in entrambi ci sono pti che non appartengono all'intersezione

$SU(6)/\mathbb{Z}_6$ $\quad \bar{\mu} \in \Lambda_{root} \quad \bar{q}_m \in \Lambda_w$

Per es $SU(6)/\mathbb{Z}_2$: $z^e = \{0,2,4\}$ $z^m = \{0,3\}$ e posso fare operatori con (z^e, z^m) combinando WL e TL ops.

Are $\mathbb{Z}_N$ labels related to QUANTUM NUMBERS?
(i.e. charges under some sym)

Yes : 1-form symmetry

Angolo θ e Witten effect

Un θ-termine genera una carica elettrica per un monopolo.
↳ Witten effect

$$q = \frac{e\theta}{2\pi}$$

← Nota che per $\theta = 2\pi$, $q = e$ e posso considerare bound state di monopolo + positrone e ottenere un monopolo scarica elettricam.

⇓

Quando $\theta \in]0, 2\pi[$ un monopolo è sempre carico anche elettricamente

Witten effect due to the fact that a monopole generates some bndry cond. at its location ⇝ this produces effect if we have a bndry term in $\mathcal{L}$.

↓

Torniamo a 't Hooft line operators.

Dato un line op. con cariche (z^e, z^m), la presenza del θ-term shifta la carica elettrica:

$$\theta \mapsto \theta + 2\pi \quad \Rightarrow \quad (z^e, z^m) \mapsto (z^e + z^m, z^m) \quad (\star)$$

- Per $G = SU(N)$, $(\star)$ mappa il reticolo di line ops su se stesso.
- Per $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$, $(\star)$ cambia lo spettro dei line ops.

$\Rightarrow$ la teoria con $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ cambia.

Lo spettro ritorna su sé stesso quando lo shift è
$\theta \mapsto \theta + 2\pi N$

In altre parole $\theta \in [0, 2\pi N[$

Un modo di capire che $\theta \in [0, 2\pi[$ in $SU(N)$ YM
è che $\int F F^*$ è quantizzato b.c.
$e^{-S_\theta} = e^{i\theta n}$ $\quad \underline{\underline{n \in \mathbb{Z}}}$ $\Rightarrow$ P.I. periodic in $\theta \to \theta + 2\pi$.

instanton number

Dire che $\theta \simeq \theta + 2\pi N$ indica che dovremmo
trovare istantoni con quantizzaz. razionale in
teorie con $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$. Infatti qto avviene

($SU(N)/\mathbb{Z}_N$ bundles hanno più connessioni di gli $SU(N)$)