Lezione 27

Lemma Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $f: V \to V$ un endomorfismo, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ autovalori di f, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$. Siano $v_1 \in \mathrm{Aut}(\lambda_1), \dots, v_k \in \mathrm{Aut}(\lambda_k)$. Si ha:

$$v_1 + \dots + v_k = 0_V \Rightarrow v_1 = \dots = v_k = 0_V.$$

Dim Induzione su $k \geq 1$.

Base dell'induzione $k=1$: $v_1 = 0_V$, nulla da dimostrare.

Ipotesi induttiva: supponiamo vero l'enunciato per $k \geq 1$ e dimostriamolo per $k+1$ vettori.

$$v_1 + \dots + v_k + v_{k+1} = 0_V \Rightarrow v_{k+1} = -(v_1 + \dots + v_k)$$

$$\Downarrow$$

$$0_V = f(v_1 + \dots + v_k + v_{k+1}) = f(v_1) + \dots + f(v_{k+1}) =$$

$$= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} =$$

$$= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k - \lambda_{k+1}(v_1 + \dots + v_k)$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \dots + (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k$$

$$(\lambda_i - \lambda_{k+1}) v_i \in \underset{\text{Sottosp. vett.}}{\mathrm{Aut}(\lambda_i)} \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 = 0_V \\ \dots \\ (\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k = 0_V \end{cases} \quad \text{(ipotesi induttiva)}$$

$$\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \Rightarrow v_1 = \dots = v_k = 0_V$$

$$\Rightarrow v_{k+1} = 0_V.$$

Teorema Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ autovalori di $f \in End(V)$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$. Sia $\mathcal{U}_i = (u_{i1}, \dots, u_{id_i})$ base per $Aut(\lambda_i)$ $\forall i = 1, \dots, k$. Allora $u_{11}, \dots, u_{1d_1}, \dots, u_{k1}, \dots, u_{kd_k}$ sono linearmente indipendenti.

Dim
$$\underbrace{\alpha_{11} u_{11} + \dots + \alpha_{1d_1} u_{1d_1}}_{v_1} + \dots + \underbrace{\alpha_{k1} u_{k1} + \dots + \alpha_{kd_k} u_{kd_k}}_{v_k} = 0_V$$

$$v_i = \alpha_{i1} u_{i1} + \dots + \alpha_{id_i} u_{id_i} \in Aut(\lambda_i) \quad \forall i = 1, \dots, k$$

$$\Rightarrow v_1 + \dots + v_k = 0_V \underset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} v_1 = \dots = v_k = 0_V$$

$\Rightarrow \alpha_{ij} = 0 \quad \forall i, j$ dato che $u_{i1}, \dots, u_{id_i}$ base di $Aut(\lambda_i)$

Corollario $f \in End(V)$ è diagonalizzabile su $\mathbb{K} \iff$
$$\dim Aut(\lambda_1) + \dots + \dim Aut(\lambda_k) = \dim V$$
dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ sono gli autovalori distinti di f.

Corollario Se $f \in End(V)$ ha $n = \dim V$ autovalori distinti $\Rightarrow$ f è diagonalizzabile.

NB Idem per le matrici $n \times n$.

Es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (1-x)(x^2-1) = -(x-1)^2(x+1)$$

$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$

$\underline{\lambda_1 = 1}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad -x + z = 0 \qquad \begin{cases} x = t \\ y = u \\ z = t \end{cases} \quad t, u \in \mathbb{R}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ base per $Aut(1)$

$\underline{\lambda_2 = -1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ $\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ base di $Aut(-1)$

$\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ <u>base diagonalizzante</u> per A

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{V}}(L_A) = P^{-1} A P, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}_3}(id_{\mathbb{R}^3})$$

<u>Forme bilineari</u>

Da questo momento $\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$.

<u>**Def**</u> Sia V uno spazio vettoriale reale. Una <u>forma bilineare</u> è una funzione $g : V \times V \to \mathbb{R}$ che sia lineare in ciascun argomento, cioè:

$$\left.\begin{array}{ll} i) & g(u+v, w) = g(u, w) + g(v, w) \\ i') & g(u, v+w) = g(u, v) + g(u, w) \\ ii) & g(\alpha v, w) = \alpha\, g(v, w) \\ ii') & g(v, \alpha w) = \alpha\, g(v, w) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \forall\, u, v, w \in V \\ \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \end{array}$$

<u>**NB**</u> Non confondere $f : V \to W$ o $f : V \to \mathbb{R}$ lineare che prende <u>un</u> argomento, con $g : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare (<u>due</u> argomenti).

Es $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilineare

$$g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$g((1,1), (3,-5)) = -2, \quad g((1,3),(3,-1)) = 0.$$

OSS $g : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare $\Rightarrow g(0_V, w) = g(w, 0_V) = 0 \quad \forall w \in V.$

Def Sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare. Diciamo che g è <u>simmetrica</u> se $g(v, w) = g(w, v) \quad \forall v, w \in V.$

Sia ora $g : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare e $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per $V.$

$$\rightsquigarrow \quad g_{ij} := g(b_i, b_j) \quad \forall i,j \quad \rightsquigarrow \quad G = (g_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

Def G è detta matrice di g rispetto alla base $\mathcal{B}$ per $V.$
Scriviamo $G = M_{\mathcal{B}}(g).$

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \qquad w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}^{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j$$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ coordinate di v $\qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ coordinate di w

$$g(v, w) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, g(b_i, b_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = {}^tX G Y.$$

La matrice $G = M_{\mathcal{B}}(g)$ permette di calcolare g in coordinate.
Non è difficile far vedere che <u>g è simmetrica</u> $\Leftrightarrow$
G è una <u>matrice simmetrica</u> $\overset{def}{\Leftrightarrow} {}^tG = G \Leftrightarrow g_{ij} = g_{ji} \quad \forall i,j$

Es $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dell'esempio precedente $M_{\mathcal{E}_2}(g) = I_2$

$c : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$c((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_2$$

$$M_{\mathcal{E}_2}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow c \text{ non simmetrica}$$

Si ha $c((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = (x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Cambio di base per forme bilineari

Sia $g : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare e siano

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ e $\mathcal{B}' = (b_1', \dots, b_n')$ due basi per V $\rightsquigarrow$

$G = M_{\mathcal{B}}(g)$ $\qquad G' = M_{\mathcal{B}'}(g)$ $\qquad G, G' \in M_n(\mathbb{R})$

$P = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V) \in GL_n(\mathbb{R})$ matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$

$v = X^{\mathcal{B}} = (X')^{\mathcal{B}'}$, $w = Y^{\mathcal{B}} = (Y')^{\mathcal{B}'} \in V$, $X = PX'$, $Y = PY'$

$$g(v, w) = {}^tX\, G\, Y = {}^t(PX')\, G\, (PY') = {}^tX'\, \underbrace{{}^tP\, G\, P}\, Y' = {}^tX'\, G'\, Y'$$

$$\forall\, X', Y' \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \boxed{G' = {}^tP\, G\, P}$$

Def Due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sono <u>congruenti</u> se $\exists\, P \in GL_n(\mathbb{R})$ t.c. $B = {}^tP\, A\, P$.

Teorema Due matrici $G, G' \in M_n(\mathbb{R})$ rappresentano la stessa forma bilineare su V rispetto a due basi diverse per V $\Leftrightarrow$ G e G' sono congruenti.

NB Non confondere le relazioni per il cambio di base

<u>Forme bilineari</u> $\rightsquigarrow$ <u>congruenza</u> $\qquad B = {}^tP\, A\, P$

<u>Endomorfismi</u> $\rightsquigarrow$ <u>similitudine</u> $\qquad B = P^{-1} A\, P$

Def Una forma bilineare simmetrica $g : V \times V \to \mathbb{R}$ è <u>definita positiva</u> se $g(v,v) > 0 \quad \forall\, v \in V - \{0_V\}$.

OSS g definita positiva, $g(v,v) = 0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} v = 0_V$.

Def Una forma bilineare simmetrica e definita positiva

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

si chiama <u>prodotto scalare</u> su V. Scriviamo

$$g(v,w) = \langle v, w \rangle$$

Uno spazio vettoriale reale V munito di prodotto scalare è detto <u>spazio vettoriale Euclideo</u>.

<u>Esempio notevole</u> $\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\langle X, Y \rangle = {}^tX\,Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

è detto <u>prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$</u>.

(Generalizza il prodotto scalare studiato in Geometria classica).

Si ha $M_{\mathcal{E}_n}(\langle \, , \, \rangle) = I_n$

$$\langle X, X \rangle = {}^tX\,X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 \quad \forall\, X \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$