Lezione 28

Prop Se V è uno spazio vettoriale Euclideo e $\mathcal{B}=(b_1,\dots,b_n)$ è base per V allora $\operatorname{rg} G = \dim V$ è massimo, dove G è la matrice del prodotto scalare rispetto a $\mathcal{B}$.

Dim Basta far vedere che $\ker L_G = 0$ (teorema della dimensione).

$\forall\ X \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow v = X^{\mathcal{B}} \in V$,

$$GX = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \langle v, v\rangle = {}^tX\,G\,X = 0 \Rightarrow v = 0_V \Rightarrow X = 0_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Rightarrow \ker L_G = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} G = n = \dim V \quad \text{(rango massimo)}.$$

Def Sia V spazio vettoriale Euclideo. Due vettori $u, v \in V$ sono <u>ortogonali</u> se $\langle u, v\rangle = 0$. Scriviamo $u \perp v$.

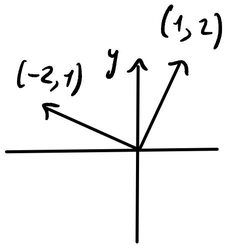
OSS $u \perp v\ \ \forall\, v \in V \iff u = 0_V$. Infatti:

$\boxed{\Rightarrow}$ $u \perp u \Rightarrow \langle u, u\rangle = 0 \Rightarrow u = 0_V$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\langle 0_V, v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in V$.

Es 1) $\mathbb{R}^2$ col prodotto scalare standard: $(1,2) \perp (-2,1)$

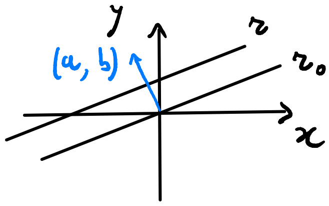
$(x,y) \perp (-y,x)$.



2) $r:\ ax+by+c=0$ retta in $\mathbb{R}^2$ con giacitura

$r_0:\ ax+by=0 \Rightarrow (a,b) \perp (x,y) \quad \forall\,(x,y) \in r_0$

(a,b) ortogonale a r.



3) $\mathbb{R}^n$ canonico: $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} \quad \forall\, i,j = 1,\dots,n \Rightarrow e_i \perp e_j,\ i \neq j$.

$H:\ a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ iperpiano con giacitura

$H_0:\ a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \Rightarrow a = (a_1,\dots,a_n) \perp v \quad \forall\, v \in H_0$

$\Rightarrow a$ ortogonale ad H.

Def Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale, con V spazio vettoriale Euclideo. Si chiama <u>ortogonale</u> di U il sottospazio vettoriale

$$U^\perp := \{ v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U \} \subset V$$

Per $u \in V$ definiamo l'ortogonale di u come

$$u^\perp := \text{span}(u)^\perp$$

Mostriamo che $U^\perp$ è effettivamente un sottospazio vettoriale di V

$\forall v, w \in U^\perp, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall u \in U$

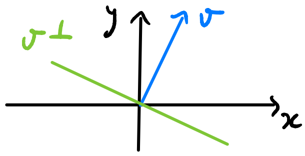
i) $0_V \in U^\perp \neq \emptyset$

ii) $\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle + \beta \langle w, u \rangle = 0 \Rightarrow \alpha u + \beta w \in U^\perp$

OSS Se $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_k)$ è base per U allora $v \in U^\perp \Leftrightarrow$ $\langle v, u_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k.$

In particolare per $u \in V$, $v \in u^\perp \Leftrightarrow \langle v, u \rangle = 0.$

Es $v = (1,2) \in \mathbb{R}^2 \rightsquigarrow v^\perp : x + 2y = 0 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$



Teorema Supponiamo $\dim V < \infty$. Sia $U \subset V$ un sottospazio vettoriale. Allora $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

Dim $(u_1, \dots, u_k)$ base per $U \underset{\text{estensione}}{\rightsquigarrow} \tilde{\mathcal{U}} = (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ base per V

$G = M_{\tilde{\mathcal{U}}}(\langle , \rangle)$ matrice del prodotto scalare rispetto a $\tilde{\mathcal{U}}$.

$v = X^{\tilde{\mathcal{U}}} \in U^\perp \Leftrightarrow \langle u_i, v \rangle = {}^t e_i G X = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow {}^t e_i G = G^{(i)}$ i-esima riga di G

$$v \in U^\perp \iff \begin{cases} G^{(1)} X = 0 \\ \cdots \\ G^{(k)} X = 0 \end{cases}$$ sistema omogeneo con matrice

data dalle prime k righe di G. $\operatorname{rg} G = n \Rightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} G^{(1)} \\ \vdots \\ G^{(k)} \end{pmatrix} = k$

$\Rightarrow \dim U^\perp = \dim \underbrace{\Sigma}_{\text{spazio delle soluzioni}} = n - k = \dim V - \dim U$

Es In $\mathbb{R}^3$ $\quad \operatorname{span}(e_1, e_2)^\perp = \operatorname{span}(e_3)$

$\operatorname{span}(e_3)^\perp = \operatorname{span}(e_1, e_2)$

$(1, -1, 2)^\perp : \; x - y + 2z = 0$ piano vettoriale

Def Sia V uno spazio vettoriale Euclideo e sia $v \in V$. La <u>norma</u> o <u>lunghezza</u> di v è il numero reale

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$$

OSS $\|v\|$ è ben definita perché $\langle v, v \rangle \geq 0 \;\; \forall v \in V$.

$\|v\| = 0 \iff v = 0_V$ ($\langle , \rangle$ definito positivo).

$\langle v, v \rangle = \|v\|^2$.

<u>**Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**</u> Sia V uno spazio vettoriale Euclideo. Si ha

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

$\forall v, w \in V$. Inoltre vale l'uguale $\iff$ v e w sono lin. dip.

Dim (soltanto $\leq$). <u>1° caso</u> $w = 0_V \Rightarrow \langle v, 0_V \rangle = 0$, $\|0_V\| = 0$

e si ha $=$.

$\underline{2° \text{ caso}}$ $w \neq 0_V \Rightarrow \|w\| \neq 0 \rightsquigarrow \alpha := -\dfrac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}$

$$0 \leq \langle v+\alpha w, v+\alpha w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, \alpha w\rangle + \langle \alpha w, v\rangle + \langle \alpha w, \alpha w\rangle =$$

$$= \|v\|^2 + 2\alpha\langle v, w\rangle + \alpha^2\|w\|^2 = \|v\|^2 - \frac{2\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2} + \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^{\cancel{4}2}}\cancel{\|w\|^2}$$

$$= \|v\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle^2}{\|w\|^2} \Rightarrow \langle v, w\rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2 \Rightarrow |\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|.$$

Corollario Si ha $\forall\, v, w \in V,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$:

i) $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$

ii) $\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$

iii) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$ Disuguaglianza triangolare per la norma.

$\underline{\text{Dim}}$ (iii) $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 \leq$

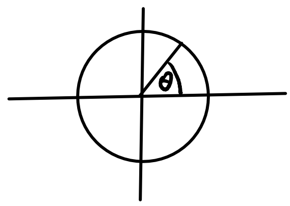
$$\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

da cui la tesi estraendo la radice quadrata.

Siano $v, w \in V - \{0_V\} \Rightarrow \dfrac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\|\,\|w\|} \leq \dfrac{\|v\|\,\|w\|}{\|v\|\,\|w\|} = 1 \Rightarrow$

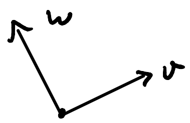
$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \leq 1 \Rightarrow \exists!\ \theta \in [0, \pi] \text{ t.c.}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$$



Def Dati due vettori non nulli $v, w \in V$ definiamo l'angolo

$$\widehat{vw} := \arccos\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \in [0, \pi]$$



$\underline{\text{OSS}}$ 1) $\widehat{vw} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \langle v, w\rangle = 0 \Leftrightarrow v \perp w$

2) $\widehat{vw} = 0 \Leftrightarrow \exists\, \alpha > 0$ t.c. $v = \alpha w$

3) $\widehat{vw} = \pi \Leftrightarrow \exists\, \alpha < 0$ t.c. $v = \alpha w$

4) Posto $\theta = \widehat{vw} \Rightarrow \langle v, w\rangle = \|v\|\,\|w\|\cos\theta$.

Teorema Siano $v_1, \dots, v_k \in V - \{0_V\}$ vettori non nulli.

$$v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j \implies v_1, \dots, v_k \text{ linearmente indip.}$$

Dim $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0_V \implies \langle \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$

$\implies \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = 0 \implies \alpha_j \|v_j\|^2 = 0 \quad \forall j \implies$

$\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$ perché $\|v_j\|^2 = \langle v_j, v_j \rangle > 0 \quad \forall j$.

Def Una base $u_1, \dots, u_n$ per V è ortonormale se

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

In altre parole $u_1, \dots, u_n$ sono ortonormali se sono a due a due ortogonali e ciascuno ha norma 1.

Es $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ è base ortonormale per $\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare canonico.

OSS Se $v \in V - \{0_V\} \rightsquigarrow v' = \frac{v}{\|v\|} \quad \|v'\| = 1$ (normalizzazione)

Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt Sia V uno spazio vettoriale Euclideo e siano $v_1, \dots, v_k \in V$ linearmente indipendenti. Allora esistono $u_1, \dots, u_k \in V$ non nulli e a due a due ortogonali t.c. $\mathrm{span}(u_1, \dots, u_i) = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_i) \ \forall i = 1, \dots, k$.

Dim Induzione su $k \geq 1$

Base dell'induzione $k = 1$ $\quad v_1 \neq 0_V \rightsquigarrow u_1 := v_1$.

Ipotesi induttiva Vero per $k-1 \geq 1$ e dimostriamolo per k.

Ipotesi induttiva $\rightsquigarrow u_1, \dots, u_{k-1} \in V - \{0_V\}$ t.c.

$$\mathrm{span}(u_1, \dots, u_i) = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_i) \quad \forall i = 1, \dots, k-1$$

$$\boxed{u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i}$$

$$\forall j = 1, \dots, k-1: \quad \langle u_k, u_j \rangle = \langle v_k, v_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i, u_j \right\rangle =$$

$$= \langle v_k, v_j \rangle - \frac{\langle v_k, u_j \rangle}{\langle u_j, u_j \rangle} \langle u_j, u_j \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad u_k \perp u_j \quad \forall j = 1, \dots, k-1.$$