Corso di ALEG
Settimo foglio di esercizi
Prof. Valentina Beorchia

December 16, 2022

1. Si verifichi che l'applicazione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

   è un'applicazione lineare. Si determini, inoltre, $\ker f$ e $\mathrm{Im}\ f$ e le loro dimensioni.

   Si scriva la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f)$ associata ad f nelle basi canoniche $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}'$ di $\mathbb{R}^3$.

2. Si dia una descrizione geometrica di ciascuna delle applicazioni lineari rappresentate dalla moltiplicazione per le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Si scriva la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ associata ad f nelle seguenti basi di $\mathbb{R}^2$:

   - $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   - $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
   - $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare che soddisfi:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Si scriva il valore di f nel generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

   Si determinino, inoltre, $\ker f$ e una sua base e $\mathrm{Im} f$ e una sua base.

5. Si dica, motivando la risposta, se può esistere un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che assuma i seguenti valori:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6. (Facoltativo) Si consideri lo spazio dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbb{C}$. Si dimostri che la funzione

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \overline{z},$$

dove $\overline{z}$ il coniugato di z, una funzione additiva (verifica (AL1)), ma non omogenea (non verifica (AL2)).

7. (Facoltativo) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Si dimostri che f è omogenea (verifica (AL2)), ma non additiva (non verifica (AL1)).