Geometria

Foglio di esercizi 7

1) Si considerino i vettori di $\mathbb{R}^2$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ è base per $\mathbb{R}^2$. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che $f(b_1) = u_1$ e $f(b_2) = u_2$. Scrivere le matrici $M_{\mathcal{E}_2}(f)$ e $M_{\mathcal{B}}(f)$ e, in entrambi i casi, scrivere f in coordinate.

Determinare nucleo, immagine e rango di f e dire se f è un isomorfismo e determinare la matrice di f^{-1} rispetto alla base canonica.

2) Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 - 2x_4 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare (molto brevemente e senza fare calcoli) perché f è lineare e determinarne la matrice rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$. Determinare $\operatorname{rg} f$ e $\dim\ker f$, e basi per $\ker f$ e $\operatorname{im} f$. Dire se f è suriettiva o iniettiva.

3) Dimostrare che l'applicazione $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (2x, 3y, 0)$$

è lineare (sempre molto brevemente e senza calcoli). Scrivere la matrice di g rispetto alla base canonica. Calcolare $\operatorname{rg} g$ e $\dim\ker g$ e dire se g è biiettiva.