# Geometria

# Foglio di esercizi 8

1) Si considerino i vettori $v_1 = (2, 0, -1, 0), v_2 = (0, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Completarli ad una base $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $\det(M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}_4}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4})) = 1$.

2) Diagonalizzare, se possibile, le seguenti matrici su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori e una base dei corrispondenti autospazi della matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se è diagonalizzabile trovare una base di autovettori per lo spazio vettoriale corrispondente, una matrice diagonale $D$ simile ad $A$ e una matrice invertibile $P$ tale che $A = PDP^{-1}$.

4) Calcolare il polinomio caratteristico, gli autovalori e una base dei corrispondenti autospazi della matrice reale

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 10 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Se è diagonalizzabile trovare una base di autovettori per lo spazio vettoriale corrispondente, una matrice diagonale $D$ simile ad $A$ e una matrice invertibile $P$ tale che $A = PDP^{-1}$.

5) Dire se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -4 & -7 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

6) Dire se la funzione seguente è una forma bilineare e in caso affermativo trovarne la matrice rispetto alla base canonica e dire se $a$ è simmetrica

$$a : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$a((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

7) Dire se la funzione seguente è una forma bilineare e in caso affermativo trovarne la matrice rispetto alla base canonica e dire se $b$ è simmetrica

$$b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_2 - x_2y_1.$$

8) Dire se la funzione seguente è una forma bilineare e in caso affermativo trovarne la matrice di $g$ rispetto alla base canonica e dire se $b$ è simmetrica

$$g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3.$$

Si può concludere che $g$ è definita positiva e quindi rappresenta un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$?

9) Verificare che i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una $\mathcal{V}$ base di $\mathbb{R}^3$ e scrivere rispetto ad essa la matrice $H = M_{\mathcal{V}}(g)$, dove $g$ è la forma bilineare dell'esercizio precedente. Trovare una matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tale che $H = {}^tPGP$ con $G = M_{\mathcal{E}_3}(g)$.

10) In $\mathbb{R}^3$ col prodotto scalare standard calcolare la norma dei vettori $v_1, v_2, v_3$ dell'esercizio precedente, e normalizzarli.

11) Trovare una base ortonormale di $U = \mathrm{span}(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^3$, dove $v_1$ e $v_2$ sono quelli dell'esercizio 9 (usare il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^3$).

12) Trovare una base ortonormale di $W = \mathrm{span}(w_1, w_2, w_3) \subset \mathbb{R}^4$ con

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

13) Determinare una base ortonormale di $W^\perp$ dove $W$ è il sottospazio dell'esercizio precedente.

14) Determinare una base ortonormale di $\mathrm{span}(w_1, w_2)^\perp$ dove $w_1, w_2$ sono i vettori dell'esercizio 12.

15) Dimostrare che per ogni $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si ha $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

16) Dimostrare che se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sono congruenti allora hanno lo stesso rango. Dedurre che il rango è una proprietà delle forme bilineari.

17) Dimostrare che se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sono congruenti allora $\det A$ e $\det B$ sono entrambi nulli oppure hanno lo stesso segno. Dedurre che il segno del determinante è una proprietà delle forme bilineari reali.