

CORSO DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2022/2023

19 dicembre 2022

Homework 1

Modalità di consegna: invio a mezzo di posta elettronica di un documento in formato *pdf* e dell'eventuale codice Matlab agli indirizzi *parisini@units.it*, *fenu@units.it*. Il messaggio dovrà avere per oggetto: *[SD20222023] HW1 Nome Cognome*. In caso di lavori di gruppo, il documento dovrà riportare i nomi di tutti gli elementi del gruppo. In caso di invio di codice Matlab, esso potrà essere contenuto in una cartella compressa. Il documento *pdf* invece NON dovrà essere compresso (ad esempio, Allegato 1: *HW1 NomeCognomeRelazione.pdf*, Allegato 2: *HW1 NomeCognomeCodice.zip*).

Consegna: almeno **due giorni prima** della data in cui si sceglie di sostenere la prova d'esame.

Termine ultimo per la consegna: ultimo appello d'esame in febbraio 2024.

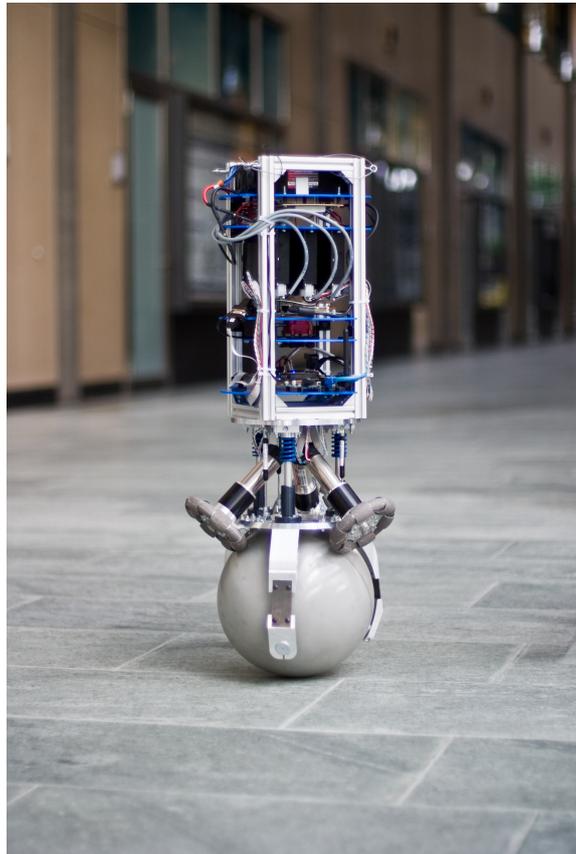


Figura 1: *Ballbot* Rezero [ETHZ-Rezero] senza rivestimento esterno, in posizione di equilibrio in quiete.

1 Introduzione

Per *ballbot* si intende una piattaforma robotica mobile progettata in modo da stare in equilibrio su di un'unica ruota sferica (come in Fig. 1). La ruota sferica viene azionata da diversi motori (elettrici di solito), permettendo così al *ballbot* di muoversi agilmente in ogni direzione sul suolo, come se fosse una specie di pendolo inverso capace di muoversi facendo rotolare la base in qualsiasi direzione nel piano.

Negli anni sono stati studiati e sviluppati diversi prototipi di *ballbot*, tra i quali quello della Carnegie Mellon University, CMU *Ballbot*, evolutosi negli anni a partire dal 2006 [Lauwers et al., 2006, Nagarajan et al., 2014, Seyfarth, 2016], il progetto BallIP [Masaaki Kumagai and Takaya Ochiai, 2008], il progetto Rezero del ETH Zurigo [Fankhauser and Gwerder, 2010, ETHZ-Rezero] e quello della Universidad de Alcalá (Spagna), basato su LEGO Mindstorms [Prieto et al., 2012].

2 Modello planare di un *ballbot*

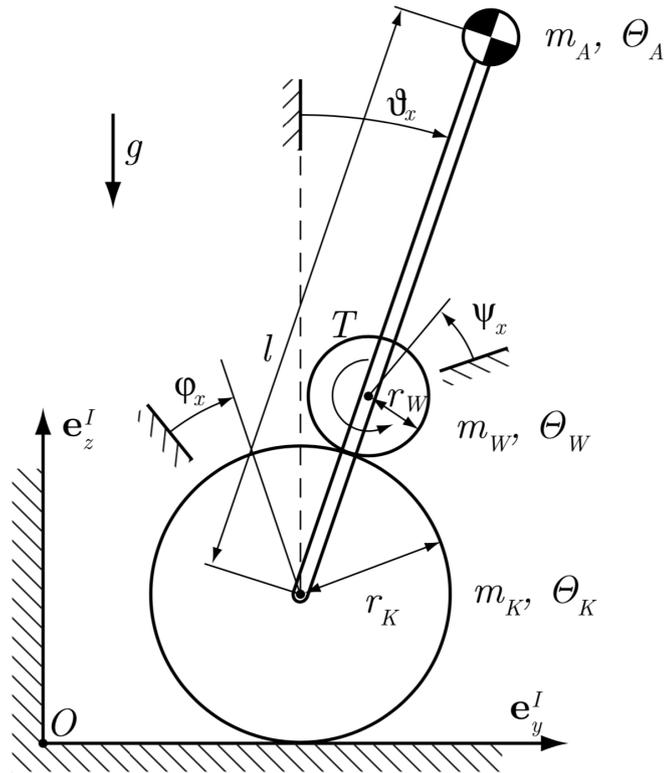


Figura 2: Modello semplificato planare di un *ballbot* (tratto da [Fankhauser and Gwerder, 2010, cap. 2])

Il sistema in Fig. 2 descrive un modello semplificato di un *ballbot*: è consuetudine infatti semplificare lo studio iniziale del modello dinamico di un *ballbot*, supponendo che il sistema sia costituito da 3 parti planari (come in Fig. 3), ciascuna delle quali permette di descrivere agevolmente i movimenti del *ballbot* nel piano corrispondente a ciascun modello. Il sistema di propulsione viene modellato come una ruota attuata in ciascuno dei piani di rotazione considerati.

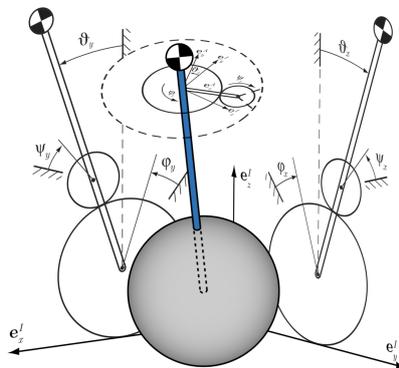


Figura 3: I 3 modelli planari per un *ballbot* (tratto da [Fankhauser and Gwerder, 2010, cap. 2])

Il modello planare descritto in Fig. 2 descrive in modo equivalente rotazioni e traslazioni nei piani (y, z) oppure (x, z) (cfr. Fig. 3), assumendo inoltre

che

- non ci sia alcun accoppiamento tra i 3 modelli planari;
- non si verifichi alcuno scivolamento né tra palla e suolo, né tra ruota attuata e palla;
- l'attrito sia trascurabile e non ci sia alcuna deformazione;
- i motori abbiano una dinamica sufficientemente elevata da poter essere trascurata nel modello: per semplicità le coppie motrici sono applicate direttamente come ingressi del sistema;
- la palla si muova solo su superfici piane orizzontali.

Come **parametri del sistema** si usino i dati seguenti

Tabella 1: Parametri per il modello planare (da [Fankhauser and Gwerder, 2010]).

Descrizione	Variabile	Valore
Massa della sfera	m_K	2.29 kg
Massa della ruota attuata virtuale	m_W	3.00 kg
Massa del corpo	m_A	9.20 kg
Raggio della sfera	r_K	0.125 m
Raggio della ruota attuata virtuale	r_W	0.060 m
Raggio del corpo (cilindro)	r_A	0.100 m
Quota del centro di massa (altezza dal suolo)	l	0.339 m
Inerzia della ruota	Θ_K	$2.39 \cdot 10^{-2}$ kgm ²
Inerzia della ruota attuata virtuale nei piani $(y, z)/(x, z)$	Θ_W	$2.36 \cdot 10^{-3}$ kgm ²
Inerzia della ruota attuata virtuale nel piano (x, y)	$\Theta_{W,xy}$	$9.45 \cdot 10^{-3}$ kgm ²
Inerzia del corpo	Θ_A	4.76 kgm ²
Inerzia del corpo nel piano (x, y)	Θ_{Axy}	$0.92 \cdot 10^{-1}$ kgm ²
Accelerazione di gravità	g	9.81 m/s ²
Rapporto di riduzione	i_{gear}	26

2.1 Equazioni del modello planare nel piano (x, z)

Le equazioni del moto possono essere determinate per esempio esprimendo l'energia cinetica e quella potenziale in funzione delle coordinate libere del sistema planare considerato e successivamente risolvendo l'equazione di Lagrange (si veda ad es. il Cap. 2 in [Fankhauser and Gwerder, 2010] per dettagli). Per quanto riguarda il modello planare nel piano (y, z) si ottengono le espressioni seguenti

$$M_x(q, \dot{q}) \ddot{q} + C_x(q, \dot{q}) + G(q) = \begin{bmatrix} \frac{r_K}{r_W} T_x \\ -\frac{r_K}{r_W} T_x \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} \varphi_x \\ \theta_x \end{bmatrix} \quad (1)$$

dove

$$M_x = \begin{bmatrix} m_{tot} r_K^2 + \Theta_K + \left(\frac{r_K}{r_W}\right)^2 \Theta_W & -\frac{r_K}{r_W^2} r_{tot} \Theta_W + \gamma r_K \cos \theta_x \\ -\frac{r_K}{r_W^2} r_{tot} \Theta_W + \gamma r_K \cos \theta_x & \left(\frac{r_{tot}}{r_W}\right)^2 \Theta_W + \Theta_A + m_A l^2 + m_W r_{tot}^2 \end{bmatrix}$$

$$C_x = \begin{bmatrix} -r_K \gamma \sin \theta_x \dot{\theta}_x^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad G_x = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \sin \theta_x \gamma \end{bmatrix}$$

ed infine

$$m_{tot} = m_K + m_A + m_W \quad r_{tot} = r_K + r_W \quad \gamma = l m_A + (r_K + r_W) m_W$$

Si noti che l'unico ingresso al sistema planare è costituito dalla coppia motrice T_x [indicata come T in Fig. 2].

3 Stima di stato con il filtro di Kalman e con il filtro di Kalman esteso

Al sistema descritto dalle Eq. 1 si applica la coppia motrice T (in Nm) data da

$$T(t) = 0.01 \cos(250t)$$

Si chiede di

- descrivere in equazioni di stato il sistema.
- assumere come uscite del sistema le osservazioni delle velocità angolari $\dot{\varphi}_x$ e $\dot{\theta}_x$, corrotte da rumore di misura. Si assuma che il rumore di misura sia rumore bianco gaussiano, di valore atteso nullo e con deviazione standard pari a 0.05 rad/s per ciascuna delle due osservazioni. Si assuma che i due rumori di misura siano indipendenti tra loro.
- Non ci sia rumore di processo.

Supponendo di campionare le grandezze del sistema con frequenza di campionamento pari a 160 Hz, si chiede di

- applicare il filtro di Kalman ed il filtro di Kalman esteso per ottenere la stima dello stato $\hat{x}(t|t)$ avendo a disposizione le informazioni seguenti

$$x(1) = [0, 0, 0, 0]^T \quad P(1) = 10 * I_4$$

- confrontare i risultati ottenuti.

Riferimenti bibliografici

- ETHZ-Rezero. Project Rezero. ETH Zurich, Autonomous Systems Lab. URL <http://rezero.ethz.ch/>.
- P. Fankhauser and C. Gwerder. Modeling and Control of a Ballbot. Bachelor's thesis, ETH–Swiss Federal Institute of Technology Zurich, 2010. URL <https://doi.org/10.3929/ethz-a-010056685>.
- T. B. Lauwers, G. A. Kantor, and R. L. Hollis. A dynamically stable single-wheeled mobile robot with inverse mouse-ball drive. In *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006.*, pages 2884–2889, May 2006. doi: 10.1109/ROBOT.2006.1642139.
- Masaaki Kumagai and Takaya Ochiai. Development of a robot balancing on a ball. In *2008 International Conference on Control, Automation and Systems*, pages 433–438, Oct 2008. doi: 10.1109/ICCAS.2008.4694680.
- U. Nagarajan, G. Kantor, and R. Hollis. The ballbot: An omnidirectional balancing mobile robot. *The International Journal of Robotics Research*, 33(6):917–930, 2014. doi: 10.1177/0278364913509126. URL <https://doi.org/10.1177/0278364913509126>.
- S. S. Prieto, T. A. Navarro, M. G. Plaza, and O. R. Polo. A Monoball Robot Based on LEGO Mindstorms [Focus on Education]. *IEEE Control Systems Magazine*, 32(2):71–83, April 2012. doi: 10.1109/MCS.2012.2185888.
- G. Seyfarth. Design, Construction, and Evaluation of a Ballbot with a Spherical Induction Motor. Master's thesis, Robotic Institute, Carnegie Mellon School of Computer Science, 2016.