Lezione 23

Corollario Se $f: X \to Y$ è un'equivalenza omotopica con $f(x_0) = y_0$ allora $f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ è un isomorfismo.

Dim $\exists\, g: Y \to X$ inversa omotopica di f $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} f \circ g \simeq id_Y \\ g \circ f \simeq id_X \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (f \circ g)_* = f_* \circ g_* \\ (g \circ f)_* = g_* \circ f_* \end{array}\right\} \text{isomorfismi}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_* \circ g_* \text{ suriettiva} \Rightarrow f_* \text{ suriettiva} \\ g_* \circ f_* \text{ iniettiva} \Rightarrow f_* \text{ iniettiva} \end{array}\right\} \Rightarrow f_* \text{ isomorfismo.}$$

Corollario Sia $a \in A \subset X$. Se $X \simeq_s A$ $\Rightarrow$

$i_*: \pi_1(A, a) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, a)$ isomorfismo.

Corollario X contraibile $\Rightarrow \pi_1(X, x_0) = 0$, $\forall\, x_0 \in X$.

Corollario $X \subset \mathbb{R}^n$ convesso $\Rightarrow \pi_1(X) = 0$. In particolare $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \pi_1(B^n) = 0$.

Teorema di non retrazione Non esiste retrazione $r: B^2 \to S^1$.

Dim $* = (1,0) \in S^1 \subset B^2$ punto base.

Supponiamo per assurdo che esiste una retrazione $r: B^2 \to S^1$

$$\underbrace{S^1 \xhookrightarrow{i} B^2 \xrightarrow{r} S^1}_{r \circ i = id_{S^1}} \Rightarrow \underbrace{\overset{\mathbb{Z}}{\pi_1(S^1)} \xrightarrow{i_*} \overset{0}{\pi_1(B^2)} \xrightarrow{r_*} \overset{\mathbb{Z}}{\pi_1(S^1)}}_{id_{\pi_1(S^1)}}$$

$\Rightarrow id_{\pi_1(S^1)} = (r \circ i)_* = r_* \circ i_* = 0$ contraddizione.

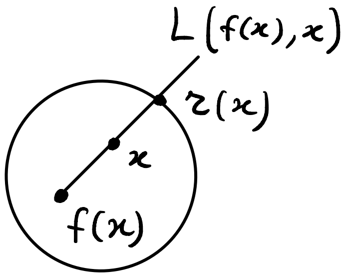
NB Si può generalizzare: $\nexists$ retrazione $r: B^n \to S^{n-1}$ $\forall n \geq 1$.
Il caso $n=1$ è molto semplice. $\boxed{E}$
Il caso $n \geq 3$ non siamo in grado di dimostrarlo.

Teorema del punto fisso di Brouwer Ogni applicazione continua $f: B^2 \to B^2$ ammette almeno un punto fisso, cioè $\exists\, a \in B^2$ t.c. $f(a) = a$.

Dim Supponiamo per assurdo che $f: B^2 \to B^2$ non ammetta punto fisso: $f(x) \neq x$ $\forall x \in B^2 \rightsquigarrow$

$$r: B^2 \to S^1$$

$$r(x) = L(f(x), x) \cap S^1$$



dove L = semiretta con origine in $f(x)$ e passante per x (senza l'origine).
r continua e $r(x) = x$ $\forall x \in S^1 \Rightarrow r$ retrazione.
Questo contraddice il teorema di non retrazione.

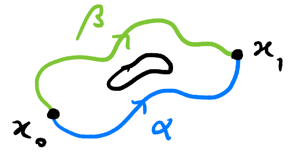
NB Si può generalizzare: $\forall f: B^n \to B^n$ continua ammette almeno un punto fisso $a \in B^n$ ($\forall n \geq 0$).
$n=0$ ovvio, $n=1$ facile $\boxed{E}$
$n \geq 3$ non siamo in grado di dimostrarlo.

Es $f = x^7 - 3x^5 + i\,x^4 + 6ix + 1 \in \mathbb{C}[x]$ ha almeno uno zero $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| \leq 1$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^7 - 3x^5 + i\,x^4 + 1 = -6ix \Leftrightarrow$

$g(x) = -\dfrac{x^7}{6i} + \dfrac{x^5}{2i} - \dfrac{1}{6}x^4 - \dfrac{1}{6i}$ ha almeno un punto fisso in B^2.

D'altra parte $g(B^2) \subset B^2 \Rightarrow \exists\, \alpha \in B^2$ t.c. $g(\alpha) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 0$.

Teorema Sia X connesso per archi e $\alpha, \beta : I \to X$ cammini con $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$, $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Se $\pi_1(X)$ è abeliano allora $\alpha_* = \beta_* : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$.



Dim $\gamma := \alpha \cdot \bar{\beta} \in \Omega(X, x_0) \implies [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$

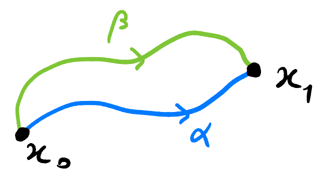
$$\left(\alpha_* \circ (\beta_*)^{-1}\right)([\omega]) = (\alpha \cdot \bar{\beta})_*([\omega]) = [\gamma \cdot \omega \cdot \bar{\gamma}] = [\gamma][\omega][\gamma]^{-1} \underset{\pi_1 \text{ ab.}}{=} [\omega]$$

$$\forall [\omega] \in \pi_1(X, x_0) \implies \alpha_* \circ (\beta_*)^{-1} = id_{\pi_1(X, x_0)} \implies \alpha_* = \beta_* .$$

OSS X connesso per archi e $\pi_1(X)$ abeliano $\implies \forall x_0, x_1 \in X$ esiste isomorfismo canonico $\alpha_* : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ indotto da un cammino arbitrario α tra x_0 e x_1.

Es $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \rightsquigarrow \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ l'isomorfismo canonico.

Def Uno spazio X è <u>semplicemente connesso</u> se $\forall x_0, x_1 \in X$ $\exists$ cammino $\alpha : I \to X$ t.c. $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = x_1$ e inoltre α è <u>unico</u> a meno di omotopia rel $\{0,1\}$: se $\beta : I \to X$ è un altro qualunque cammino da x_0 a x_1 si ha $\alpha \simeq_{\{0,1\}} \beta$.



OSS Semplicemente connesso $\implies$ connesso per archi.

Prop Uno spazio X è semplicemente connesso $\iff$ X è connesso per archi e $\pi_1(X) = 0$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall [\omega] \in \pi_1(X, x_0) \Rightarrow \omega$ cammino da x_0 a x_0

x_0 cammino costante $\Rightarrow x_0 \simeq_{\{0,1\}} \omega \Rightarrow [\omega] = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\alpha, \beta : I \to X$ cammini da x_0 a x_1 $\Rightarrow$

$\alpha \cdot \bar{\beta}$ cappio basato in x_0 $\Rightarrow [\alpha \cdot \bar{\beta}] \in \pi_1(X, x_0) = 0 \Rightarrow$

$\alpha \cdot \bar{\beta} \simeq_{\{0,1\}} x_0 \Rightarrow \alpha \cdot \underbrace{\bar{\beta} \cdot \beta}_{\simeq x_1} \simeq_{\{0,1\}} x_0 \cdot \beta \Rightarrow \alpha \simeq_{\{0,1\}} \beta$.

OSS Contraibile $\Rightarrow$ semplicemente connesso.

$\mathbb{R}^n$, B^n semplicemente connessi (in quanto contraibili)

S^1 <u>non</u> semplicemente connesso.

Def Un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ è detto rivestimento universale di X se $\tilde{X}$ è semplicemente connesso.

Es $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$ è rivestimento universale.