(1) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}\right) =$

$\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$

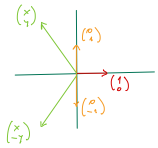
$f\left(c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} cy \\ cy \\ cx \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} y \\ y \\ x \end{pmatrix} = c \cdot f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}(f(e_1), f(e_2))$
$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $\dim \operatorname{Im} f = 2$

$\dim \ker f = n - rg f = 2 - 2 = 0$, $\ker f = \{0\}$

$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Corso di ALEG
Settimo foglio di esercizi
Prof. Valentina Beorchia



December 16, 2022

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$L_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$L_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

L_A è la RIFLESSIONE RISP. ASSE x.

1. Si verifichi che l'applicazione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

Analogamente: Per $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si ha che L_A è la riflessione risp. asse y, e per $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ si ha $L_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ è la RIFLESSIONE RISP. al punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

è un'applicazione lineare. Si determini, inoltre, $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro dimensioni.
Si scriva la matrice $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f)$ associata ad f nelle basi canoniche $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}'$ di $\mathbb{R}^3$.

2. Si dia una descrizione geometrica di ciascuna delle applicazioni lineari rappresentate dalla moltiplicazione per le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si consideri l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si scriva la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ associata ad f nelle seguenti basi di $\mathbb{R}^2$:

- $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} f\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{2}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'unica applicazione lineare che soddisfi:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si scriva il valore di f nel generico vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

Si determinino, inoltre, $\ker f$ e una sua base e $\operatorname{Im} f$ e una sua base.

$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = x \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y \cdot f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + z \cdot f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ker f$: $x + y + z = 0$, $\dim \ker f = 2$, una base di $\ker f$ $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$\dim \operatorname{Im} f = 3 - 2 = 1$, base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

⑤ $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; se f è AL, deve soddisfare $f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

invece si ha: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$

f è non additiva

5. Si dica, motivando la risposta, se può esistere un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che assuma i seguenti valori:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

6. (Facoltativo) Si consideri lo spazio dei numeri complessi $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale di dimensione 1 su $\mathbb{C}$. Si dimostri che la funzione

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \overline{z},$$

dove $\overline{z}$ il coniugato di z, una funzione additiva (verifica (AL1)), ma non omogenea (non verifica (AL2)).

7. (Facoltativo) Si consideri la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Si dimostri che f è omogenea (verifica (AL2)), ma non additiva (non verifica (AL1)).