# Lezione 29

**Corollario** Sia $V$ uno spazio vettoriale Euclideo, $\dim V < \infty$. Allora $V$ ammette una base ortonormale.

**Dim** $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base per $V \underset{GS}{\leadsto} (u'_1, \dots, u'_n)$ base ortogonale $\underset{\text{normalizz.}}{\leadsto} \mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale per $V$

con $u_i = \dfrac{u'_i}{\|u'_i\|}$

Sia $B \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Per capire se $B$ è definita positiva (cioè se ${}^tX B X > 0 \ \forall X \in \mathbb{R}^n - \{0\}$) si usa il metodo dei determinanti: $B$ definita positiva $\iff \det B_k > 0$ $\forall k = 1, \dots, n$ dove $B_k$ è la sottomatrice $k \times k$ ottenuta intersecando le prime $k$ righe con le prime $k$ colonne di $B$, cioè

$$B = \left( \begin{array}{c|c} B_k & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots \end{array} \right).$$

Se $B$ è definita positiva allora

$\langle , \rangle_B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\langle X, Y \rangle_B := {}^tX B X$ è un prodotto scalare.

**Es** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ è definita positiva: $1 > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$

e quindi definisce un prodotto scalare $\langle , \rangle_B$ su $\mathbb{R}^2$

Cerchiamo base ortonormale rispetto a $\langle , \rangle_B$ con GS su $\mathcal{E}_2$:

$\langle e_1, e_1 \rangle_B = 1$, $\langle e_1, e_2 \rangle_B = 1$, $\langle e_2, e_2 \rangle_B = 2$

$v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, v_1 \rangle_B}{\langle v_1, v_1 \rangle_B} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2 \rangle = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$\Rightarrow v = (v_1, v_2)$ base ortonormale per $\mathbb{R}^2$ rispetto a $\langle , \rangle_B$.

Altro modo per provare che $B$ definita positiva:

$$\langle X, X \rangle_B = {}^tX\, B\, X = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \geqslant 0$$

$\forall\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ e vale $= \iff \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

## Endomorfismi autoaggiunti (o simmetrici)

**Def** Sia $V$ spazio vettoriale Euclideo e sia $f : V \to V$ lineare.

Diciamo che $f$ è autoaggiunto se

$$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall\, v, w \in V.$$

**Teorema** Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ una base ortonormale per $V$. Allora $f$ è autoaggiunto $\iff M_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice simmetrica.

**Dim** $v = X^{\mathcal{B}}$, $w = Y^{\mathcal{B}}$, $A = M_{\mathcal{B}}(f) \in M_n(\mathbb{R})$

$\langle f(v), w \rangle = {}^t(AX)\, Y = {}^tX\, {}^tA\, Y$

$\langle v, f(w) \rangle = X A Y$

Pertanto $f$ autoaggiunto $\iff {}^tX\, {}^tA\, Y = {}^tX\, A\, Y \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{R}^n$

$\iff {}^tA = A \iff A$ simmetrica.

**Es** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ autoaggiunto rispetto a $\langle , \rangle_{can}$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow L_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ non autoaggiunto.

**Lemma** Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica. Allora gli autovalori di $A$ sono tutti reali.

**Corollario** Sia $f \in End(V)$ autoaggiunto, $\dim V < \infty$. Allora $f$ ha almeno un autovalore (reale).

**Dim** $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ base ortonormale per $V \Rightarrow A = M_{\mathcal{B}}(f)$ simmetrica.

**Teorema** Sia $f \in End(V)$ autoaggiunto. Allora autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.

**Dim** $\lambda \neq \mu \in \mathbb{R}$ autovalori $\leadsto v, w \in V$ autovettori relativi a $\lambda$ e $\mu$ risp.

$\lambda \langle v, w \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle = \mu \langle v, w \rangle \Rightarrow (\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$

$\lambda - \mu \neq 0 \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v \perp w$.

**Teorema spettrale** Sia $V$ uno spazio vettoriale Euclideo con $\dim V < \infty$, e sia $f \in End(V)$ autoaggiunto. Allora esiste una base ortonormale per $V$ che diagonalizza $f$.

**Dim** Induzione su $n = \dim V \geq 1$.

Base dell'induzione $n = 1 \Rightarrow \exists\, u \in V, \|u\| = 1 \Rightarrow u$ base ortonormale diagonalizzante.

Ipotesi induttive Supponiamo vero l'enunciato per $n-1 \geq 1$ e dimostriamolo per $n$. $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore di $f \leadsto v \in V - \{0_V\}$ autovettore: $f(v) = \lambda v$.

$U := \operatorname{span}(v)^\perp \Rightarrow \dim U = n-1$. Mostriamo che $f(U) \subset U$.

$\forall\, u \in U, \ \langle v, f(u) \rangle = \langle f(v), u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = 0 \Rightarrow f(u) \in U$

$\Rightarrow f(U) \subset U \Rightarrow f|_U : U \to U$ autoaggiunto. Ipotesi induttive $\Rightarrow$

$\exists\, u_1, \dots, u_{n-1}$ base ortonormale per $U$ che diagonalizza $f|_U$.

$u_n := \frac{v}{\|v\|} \Rightarrow (u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale per $V$ che diagonalizza $f$.

# Matrici ortogonali

**Def** $P \in M_n(\mathbb{R})$ è <u>ortogonale</u> se ${}^tP\,P = I_n$

**OSS** 1) $P$ ortogonale $\Longleftrightarrow P^{-1} = {}^tP$.

2) $P$ ortogonale $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} \det P = \pm 1$ infatti

$$1 = \det I_n = \det({}^tP\,P) = (\det P)^2 \Rightarrow \det P = \pm 1$$

**Def** $O(n) := \{P \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tP\,P = I_n\}$ è detto <u>gruppo ortogonale</u> di ordine $n$. È l'insieme delle <u>matrici ortogonali</u> $n \times n$.

**Def** $SO(n) = \{P \in O(n) \mid \det P = 1\}$ è detto <u>gruppo ortogonale speciale</u> di ordine $n$. È l'insieme delle <u>matrici ortogonali speciali</u> $n \times n$ (cioè le matrici ortogonali con $\det = 1$).

**OSS** 1) $SO(n) \subset O(n) \subset GL_n(\mathbb{R})$

2) $I_n \in SO(n)$

3) $P, Q \in O(n) \Rightarrow PQ \in O(n)$ e $P^{-1} \in O(n)$

4) $P, Q \in SO(n) \Rightarrow PQ \in SO(n)$ e $P^{-1} \in SO(n)$

**Es** 1) $O(1) = \{1, -1\}$, $SO(1) = \{1\}$

2) $P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in SO(2)$

$${}^tP\,P = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Prop** Sia $P \in M_n(\mathbb{R})$. Le seguenti sono equivalenti:

i) $P$ è ortogonale

ii) le colonne di $P$ formano base ortonormale per $\mathbb{R}^n$

iii) le righe di $P$ formano base ortonormale per $\mathbb{R}^n$

**Dim** $({}^tP\,P)_{ij} = ({}^tP)^{(i)}\,P_{(j)} = {}^t(P_{(i)})\,P_{(j)} = \langle P_{(i)}, P_{(j)} \rangle$

Quindi ${}^tP\,P = I_n \iff$ le colonne di $P$ sono base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (col prodotto scalare canonico).

Questo dimostra (i) $\iff$ (ii)

Per (iii) si osservi che $P \in O(n) \iff {}^tP \in O(n)$, infatti:

$$ {}^tP\,P = I_n \underset{{}^tP = P^{-1}}{\iff} P\,{}^tP = I_n $$

Ne consegue che le <u>matrici dei cambiamenti di basi ortonormali</u> sono precisamente le <u>matrici ortogonali</u>.

**Corollario del teorema spettrale** Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica. Allora $\exists\, P \in O(n)$ t.c. $D = P^{-1}AP$ è diagonale.

**Dim** $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ autoaggiunto. Teorema spettrale $\Rightarrow \exists$ base ortonormale $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ per $\mathbb{R}^n$ t.c. $D = M_{\mathcal{U}}(L_A)$ diagonale

$P = (u_1 \dots u_n) = M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{U}}(id_{\mathbb{R}^n}) \Rightarrow D = P^{-1}AP$.

**NB** $P \in O(n) \iff P^{-1} = {}^tP$ : conviene fare la trasposta per calcolare $P^{-1}$!

**Es** $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 2 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -1$ autovalori

$\lambda_1 = 4 \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad 2x - y = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ base per $Aut(4)$

$\|v_1\| = \sqrt{5} \qquad u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad x + 2y = 0 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ base per $Aut(-1)$

$\|v_2\| = \sqrt{5} \qquad u_2 = \dfrac{v_2}{\|u_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ base ortonormale diagonalizzante $\rightsquigarrow$

$P = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = M^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{U}}(id_{\mathbb{R}^2}) \in SO(2)$, $\qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = {}^tP = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\qquad D = P^{-1} A P.$