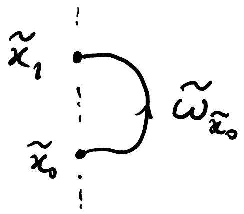
Lezione 24

Teorema Sia $p : \tilde{X} \to X$ rivestimento universale, e sia $x_0 \in X$.
Allora $\exists\ \varphi : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} p^{-1}(x_0)$ biiezione.

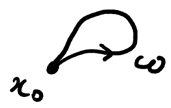
Dim (idea) Fissiamo $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$



$$\varphi([\omega]) = \tilde{\omega}_{\tilde{x}_0}(1)$$

dove $\tilde{\omega}_{\tilde{x}_0}$ è il sollevamento di ω t.c.

$$\tilde{\omega}_{\tilde{x}_0}(0) = \tilde{x}_0 .$$



i) Teoremi di sollevamento di cammini e omotopie $\Rightarrow$ φ ben definita

ii) φ iniettiva: $\varphi([\omega]) = \varphi([\gamma]) \Rightarrow \tilde{\omega}_{\tilde{x}_0}(0) = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(0) = x_0$ e

$$\tilde{\omega}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(1) \underset{\pi_1(\tilde{X})=0}{\Longrightarrow} \tilde{\omega}_{\tilde{x}_0} \simeq_{\{0,1\}} \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0} \Rightarrow$$

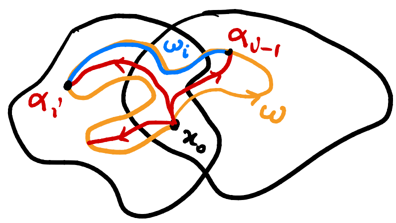
$$\omega = p \circ \tilde{\omega}_{\tilde{x}_0} \simeq_{\{0,1\}} p \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0} = \gamma \Rightarrow [\omega] = [\gamma].$$

iii) φ suriettiva: $\forall\ \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ $\exists\ \alpha : I \to \tilde{X}$ cammino t.c.
$\alpha(0) = \tilde{x}_0$, $\alpha(1) = \tilde{x}_1$ $\Rightarrow$ $\omega = p \circ \alpha$ cappio in X basato in x_0
$\Rightarrow \tilde{\omega}_{\tilde{x}_0} = \alpha \Rightarrow \varphi([\omega]) = \tilde{x}_1$.

OSS $[\omega] = 0 \iff \varphi([\omega]) = \tilde{x}_0$.

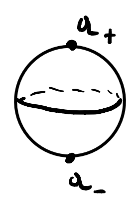
Lemma Sia $X = U \cup V$ con $U, V, U \cap V$ aperti non vuoti e connesso per archi. Se $\pi_1(U) = \pi_1(V) = 0$ allora $\pi_1(X) = 0$.

Dim (Idea) $[\omega] = \prod_{i=1}^{k} [\alpha_{i-1} \omega_i \cdot \bar{\alpha}_i] = 1.$



Corollario $\pi_1(S^n) = 0 \quad \forall n \geq 2$.

Dim $a_+ = (0, \dots, 0, 1)$, $a_- = -a_+ = (0, \dots, 0, -1)$



$U_+ = S^n - \{a_+\} \cong \mathbb{R}^n \ni 0$, $\quad U_- = S^n - \{a_-\} \cong \mathbb{R}^n \ni 0$

$U_+ \cap U_- \cong \mathbb{R}^n - \{0\}$ connesso per archi se $n \geq 2 \Rightarrow \pi_1(S^n) = 0$

Corollario $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2 \quad \forall\, n \geq 2.$

Dim $p_n : S^n \to \mathbb{R}P^n$, $p_n(x) = [x]$ rivestimento universale $n \geq 2$,

$p_n^{-1}([x]) = \{x, -x\} \Rightarrow \#\pi_1(\mathbb{R}P^n) = 2 \quad \forall\, n \geq 2 \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2.$

NB $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$ perché $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$.

$$\begin{tikzcd}
 & S^1 \arrow[r, hook, "\tilde{i}"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[d, bend right, "q"'] & S^n \arrow[d, "p_n"] \\
I \arrow[ur, "\tilde{\omega}"] \arrow[r, "\omega"'] & S^1 \cong \mathbb{R}P^1 \arrow[r, hook, "i"'] & \mathbb{R}P^n
\end{tikzcd}$$

$\tilde{i}(x_0, x_1) = (x_0, x_1, 0, \ldots, 0)$

$i([x_0, x_1]) = [x_0, x_1, 0, \ldots, 0]$

$q(z) = z^2$ $\qquad \tilde{\omega}(0) = 1$

$\omega(t) = e^{2\pi i t} \rightsquigarrow \tilde{\omega}(t) = e^{\pi i t} \Rightarrow \tilde{i} \circ \tilde{\omega}$ sollevamento di $i \circ \omega$

giro completo $\qquad$ mezzo giro $\qquad$ non è un cappio $\Rightarrow \varphi(i_*([\omega])) \neq \tilde{x}_0$

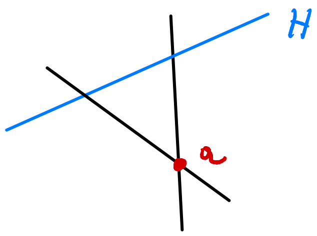
$\Rightarrow i_* : \pi_1(\mathbb{R}P^1) \to \pi_1(\mathbb{R}P^n)$ non è nulla

$i_*([\omega]) = [i \circ \omega]$ $\qquad$ i_* è la mappa $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$

generatore $\mapsto$ generatore $\qquad$ $n \mapsto n \pmod 2$

In altre parole $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ è generato da $\mathbb{R}P^1$ (visto come cappio).

Corollario $\pi_1(\mathbb{C}P^n) = 0 \quad \forall\, n \geq 0$



Dim Induzione su $n \geq 0$

Base dell'induzione $n = 0$ $\quad \mathbb{C}P^0 = \{0\}$ ovvio

Supponiamo che $\pi_1(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0$ per $n-1 \geq 0$

$H : x_0 = 0 \Rightarrow H \cong \mathbb{C}P^{n-1} \Rightarrow \pi_1(H) = 0 \rightsquigarrow U = \mathbb{C}P^n - H \cong \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$

$a = [1, 0, \ldots, 0] \in U \rightsquigarrow V = \mathbb{C}P^n - \{a\} \qquad \pi_1(U) = 0$

$K : V \times I \to V \qquad K([x_0, \ldots, x_n], t) = [(1-t)x_0, x_1, \ldots, x_n]$

$\Rightarrow V \simeq H \Rightarrow \pi_1(V) = 0.$

$U \cap V \cong \mathbb{C}^n - \{0\}$ connesso per archi $\forall\, n \geq 1$.

Teorema di Borsuk-Ulam Sia $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ continua.
Allora $\exists\, x \in S^2$ t.c. $f(x) = f(-x)$.

Dim Per assurdo supponiamo $f(x) \neq f(-x)$ $\forall x \in S^2$ $\rightsquigarrow$

$$g : S^2 \to S^1 \,, \quad g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\| f(x) - f(-x) \|} \quad \text{continua}$$

$$\Rightarrow \quad g(-x) = -g(x) \rightsquigarrow G : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^1 \quad \text{continua}$$

$$G([x]) = [g(x)]$$

$\tilde{\omega}$ 

$$\begin{tikzcd}
 & S^1 \arrow[r, hook, "\tilde{i}"] \arrow[d, "p_1"] & S^2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_2"'] & S^1 \arrow[d, "p_1"] \\
I \arrow[ur, "\tilde{\omega}"] \arrow[r, "\omega"'] & \mathbb{R}P^1 \arrow[r, hook, "i"'] & \mathbb{R}P^2 \arrow[r, "G"'] & \mathbb{R}P^1
\end{tikzcd}$$

p_1, p_2 rivestimenti doppi

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{R}P^2) \arrow[r, "G_*"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \pi_1(\mathbb{R}P^1) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\mathbb{Z}_2 \arrow[r, "0"'] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd} \Rightarrow \boxed{G_* = 0}$$

D'altra parte $\tilde{\omega}(1) = -\tilde{\omega}(0) \Rightarrow (\tilde{i} \circ \tilde{\omega})(1) = -(\tilde{i} \circ \tilde{\omega})(0) \Rightarrow$

$$(\tilde{g} \circ \tilde{i} \circ \tilde{\omega})(1) = -(\tilde{g} \circ \tilde{i} \circ \tilde{\omega})(0) \Rightarrow$$

$\tilde{g} \circ \tilde{i} \circ \tilde{\omega} = G \circ i \circ \omega$ non è un cappio

$$\Rightarrow G_*(i_*([\omega])) = [G \circ i \circ \omega] \neq 0 \quad \text{contraddizione.}$$

NB Il teorema vale in generale per mappe continue $f : S^n \to \mathbb{R}^n$

Il caso $n=1$ è semplice $\boxed{E}$

$n \geq 3$ va oltre gli obiettivi di questo corso.

Applicazione In ogni istante ci sono due punti diametrali sulla superficie terrestre con stesse temperatura e pressione.

Corollario S^2 non si può immergere in $\mathbb{R}^2$

Teorema Siano $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Si ha

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

Dim $p_1 : X \times Y \to X$ $\quad$ $p_2 : X \times Y \to Y$ proiezioni

$p_1(x,y) = x$ $\quad$ $p_2(x,y) = y$

$$\rightsquigarrow \quad P : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

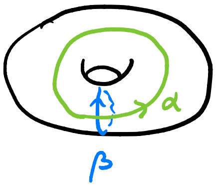
$$P([\omega]) = (p_{1*}([\omega]), p_{2*}([\omega]))$$

p_{1*}, p_{2*} omomorfismi $\Rightarrow$ P omomorfismo

E' facile far vedere che P è biiettivo $\Rightarrow$ P isomorfismo.

Corollario $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$.

$\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$



α, β generatori