

5 oct. 2 ore Complete metric spaces, product topology, Tychonov Theorem (statement only); normal spaces and Uryshon lemma with some corollaries (no proofs).

7 oct 2 ore Reisz representation theorem: definition of the measure, monotonicity, verification that compact sets and open sets of finite measure belong to M_F , subadditivity; proof that $\int Af$ equals the integral of f .

12 ottobre 2 ore. Proof of the Weierstrass approximation theorem. Theorem by Ascoli and Arzelà (proof of the sufficiency of equicontinuity and pointwise boundedness for relative compactness). Definition of topological vector space. Balanced and absorbing sets.

14 ottobre 2 ore. Continuous linear operators between topological vector spaces. Characterization of hyperplanes in terms of linear functionals. Metrizable topological vector spaces (only statement of theorem).

19 ottobre 2 ore. Definition of locally convex topological vector spaces X . Proof of the existence of a continuous seminorm for any open convex neighborhood of 0 in X . Sub-basis of seminorms. The case of metrizable locally convex topological vector spaces. Space of Schwartz test functions. Bounded operators between normed spaces.

21 ottobre 2 ore. Notions of strong convergence and of uniform convergence of sequences of operators. Some example of operators. Spectrum $\sigma(T)$ and resolvent set $\rho(T)$ of a bounded operator T in a Banach space on C . Invertibility of $1+T$ if $\|T\| < 1$. Proof that $z \in \rho(T)$ if $|z| > \|T\|$. Exponential of a bounded operator.

26 ottobre 2 ore, Analytic form of Hahn Banach Theorem (with proof), with various Corollaries, in particular on the norm of the adjoint operator. Statement of a Theorem on Harmonic functions in the unit disk.

28 ottobre 2 ore Separation with a hyperplane and strict separation. Proof of 2 geometric forms of the Hahn-Banach Theorem. Proof of a corollary on proper closed vector subspaces of a locally convex space. A concrete application: the Muntz-Szasz Theorem, with just a sketch of proof.

31 ottobre 2 ore Biduale di uno spazio normato e verifica che la mappa biduale è una isometria. Verifiche su ortogonali e biortogonali con in particolare le relazioni di ortogonalità tra nuclei e range di operatori. Sottospazi G_δ . Famiglie di operatori equicontinui tra spazi vettoriali topologici e verifica che sono "equilimitate". Formulazione e dimostrazione del teorema di Banach e Steinhaus per famiglie di operatori continui tra due spazi vettoriali topologici. Corollario per successioni di operatori continui tra due spazi normati. Definizione di serie di Fourier, in dimensione 1 ed in dimensione generica d .

2 novembre. Nucleo di Dirichlet. Dimostrazione che esistono funzioni continue le cui serie di Fourier non sono convergenti in 0 . Enunciato del teorema della mappa aperta. Nucleo di Fejer e dimostrazione per ogni elemento f di $C^0(T)$ dell'esistenza di una successione di polinomi trigonometrici che converge ad f in $C^0(T)$. Dimostrazione di un corollario che un operatore continuo biiettivo tra due spazi di Banach ha inversa

limitata. Applicazione sul fatto che $c_0(Z)$ ha elementi che non sono i coefficienti di Fourier di funzioni in $L^1(T)$.

Mercoledì 9 novembre 2 ore. Dimostrazione del teorema della mappa aperta. Dimostrazione del teorema del grafico chiuso. Sottospazi complementabili. Vari esempi e dimostrazione nel caso in cui il sottospazio abbia dimensione finita. Definizione di proiezione. Nesso tra proiezioni e scomposizioni in somme dirette.

Venerdì 11 novembre 2 ore Definizione di topologia debole $\sigma(E, E')$, dimostrazione che è di Hausdorff, che in uno spazio localmente convesso i chiusi convessi per le topologie debole e forte coincidono. Un lemma sulle successioni debolmente convergenti. Dimostrazione che tutti gli aperti per la topologia $\sigma(E, E')$ in dimensione infinita contengono una retta. Verifica che la topologia debole non è metrizzabile. Qualche esempio di successioni convergenti debolmente a 0 in spazi di Lebesgue, usando traslazioni e rescaling.

Mercoledì 16 novembre 2 ore. Verifica che una mappa lineare tra due spazi di Banach è continua se e solo se lo è per le topologie deboli. Topologia debole $\sigma(E', E)$, dimostrazione che è di Hausdorff. Verifica che $c_0(N)$ non è chiuso per la topologia debole $\sigma(l^\infty, l^1)$. Verifica che i funzionali per $\sigma(E', E)$ provengono da elementi di E .

Venerdì 18 novembre 2 ore Dimostrazione del teorema di Banach Alaoglu. Un esempio di una successione che form un insieme relativamente compatto ma che non ha sottosuccessioni convergenti. Definizione di spazi riflessivi e dimostrazione del teorema di Kakutani. Riflessività di sottospazi chiusi. Equivalenza tra riflessività di E e di E' . Compattezza in $\sigma(E, E')$ di convessi chiusi e limitati in spazi riflessivi E . Esistenza di minimi assoluti per funzionali convessi e semicontinui inferiormente, che vanno a $+\infty$ all' $+\infty$.

Mercoledì 23 novembre 2 ore. Spazi misurabili e verifica che se E è di Banach e E' è misurabile, anche E lo è. Verifica che $L^\infty(-1, 1)$ non è separabile. Verifica che una successione limitata in uno spazio di Banach riflessivo E ha una sottosuccessione debolmente convergente in $\sigma(E, E')$. Spazi L^p . Verifica con un esempio che la convergenza in L^p non implica la convergenza puntuale quasi ovunque.

Venerdì 25 novembre 2 ore Proof of the completeness of the L^p spaces. Proof that for $2 \leq p < \infty$ the spaces L^p are uniformly convex and for $1 < p < \infty$ are reflexive. Proof of Riesz representation theorem for $1 \leq p < \infty$.

Mercoledì 30 novembre 2 ore. Young's convolution inequality. The Kolmogorov, Riesz, Fréchet compactness theorem.

Venerdì 2 dicembre 2 ore Proof of the density in $L^p(A)$ of $C^\infty_c(A)$ for A open in Euclidean space and $p < \infty$. Mollification. Hilbert spaces. Cauchy Schwartz inequality.

Mercoledì 7 dicembre 2 ore. Proof of the Minkowski inequality for $\|f\|_H^2 := (f, f)_H$. Proof of the existence of a unique projection on a closed convex subspace of a Hilbert space H . Proof that the projection is a contraction and that it is a linear map if the convex space is a vector space. Orthonormal set and orthonormal bases. Existence of bases. Bessel inequality and Parseval identity.

Lunedì 12 dicembre 2 ore Dimostrazione della disuguaglianza di Bessel e dell'identità di Parseval per famiglie ortonormali. Aggiunto di un operatore lineare limitato in uno spazio di Hilbert. Operatori autoaggiunti e operatori unitari. Operatori positivi. Teorema sulla radice quadrata di un operatore autoaggiunto positivo (senza dim.). Decomposizione polare di un operatore limitato (senza dim.).

Mercoledì 14 dicembre 2 ore. Operatori compatti. Vari teoremi sugli operatori compatti. Alcuni esempi, come le convoluzioni su \mathbb{R}^d che non sono operatori compatti in $L^p(\mathbb{R}^d)$ a valori in $L^r(\mathbb{R}^d)$ Esempio di operatori compatti. Composizione di un operatore continuo con un operatore compatto è un operatore compatto. Un operatore è compatto se e solo se l'aggiunto è compatto (senza dim.). Gli operatori compatti definiti in uno spazio di Banach a valori in uno spazio di Hilbert sono limiti uniformi di operatori di rango finito.

Venerdì 16 dicembre 2 ore Verifica che le convoluzioni in $L^2(\mathbb{T}^d)$ fatte usando funzioni di $L^1(\mathbb{T}^d)$ sono operatori compatti. Una caratterizzazione degli spazi di Banach finito dimensionali, in termini della compattezza della palla unitaria chiusa. Enunciato (senza dimostrazione) del teorema dell'alternativa di Fredholm per operatori della forma $1-K$, per K un operatore compatto in uno spazio di Banach X , ed interpretazione in termini della decomposizione spettrale di K .

Lunedì 19 dicembre 2 ore Dimostrazione del teorema dell'alternativa di Fredholm per operatori della forma $1-K$, per K un operatore compatto in uno spazio di Banach X . Dimostrazione che se $\dim X = \infty$ allora 0 appartiene allo spettro $\sigma(K)$, che un punto non uguale allo 0 in $\sigma(K)$ è un autovalore. Un esempio di operatore compatto K , con nucleo nullo ed il cui spettro contiene solo lo 0 .

Mercoledì 21 dicembre 2 ore Forme bilineari limitate e coercive. Dimostrazione del teorema di Lax Milgram e di un corollario sull'esistenza ed unicità di opportune soluzioni deboli di equazione funzionali. Spazi di Sobolev $H^s(\mathbb{T}^d)$ per ogni s reale, cenni ad alcune loro proprietà, immersione di $H^s(\mathbb{T}^d)$ in $C^0(\mathbb{T}^d)$ se $s > d/2$, cenni all'immersione di Sobolev $H^s(\mathbb{T}^d)$ in $L^q(\mathbb{T}^d)$ per $1/q = 1/2 - s/d$ per $0 < s < d/2$ ed al fatto che non è compatta. Cenni alla decomposizione spettrale di operatori compatti ed autoaggiunti. Cenni all'applicazione di Lax Milgram a problemi con condizioni di Neumann al contorno e cenni alla decomposizione spettrale di $-\Delta + V$ in $L^2(\mathbb{T}^d)$ per V una funzione continua, reale e non negativa.