$$\circledast \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$X' = A \cdot X$$

$$\operatorname{tr} A = a + d \qquad \det A = ad - bc$$

$$z'' - (a+d)\, z' + (ad - bc)\, z = 0$$

$$k = ad - bc$$
$$h = -(a+d)$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è punto di equilibrio del sistema $\circledast$

1) $\Delta > 0$ $\boxed{\Delta = h^2 - 4k = (a-d)^2 + 4bc}$

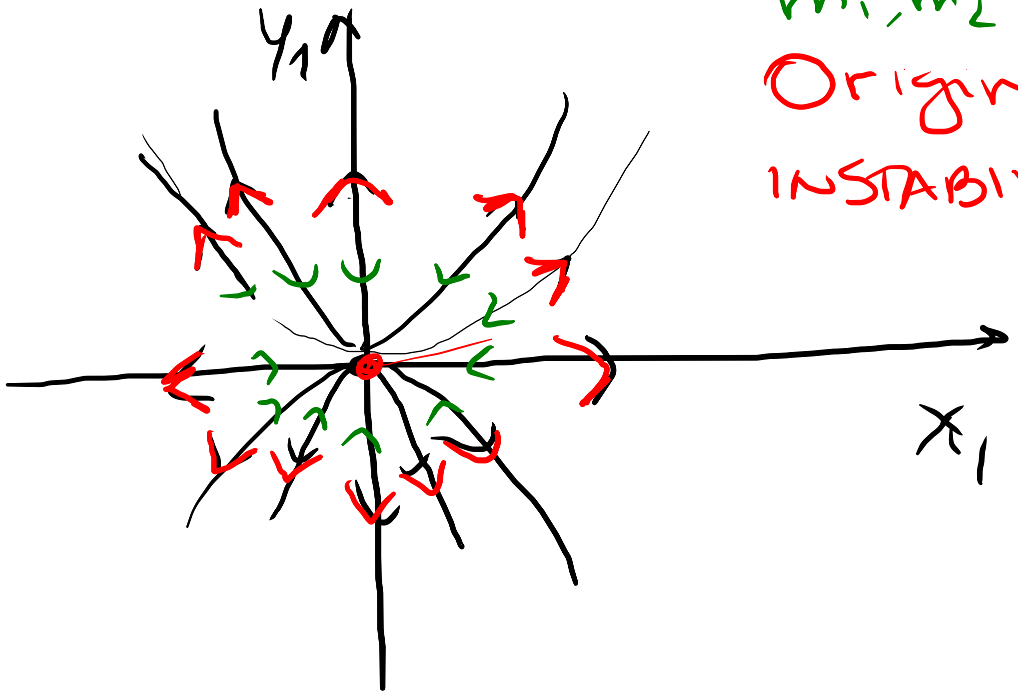
m_1, m_2 radici reali di $\boxed{t^2 + ht + k = 0}$

$\boxed{I}$ m_1, m_2 concordi e distinti

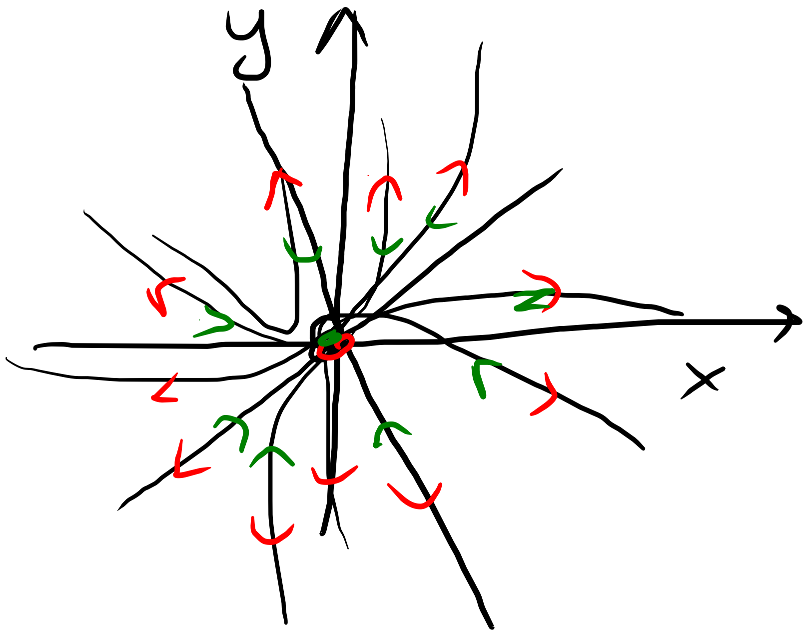
NODO $\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$

canonico

m_1, m_2 positivi
m_1, m_2 negativi
Origine è un equilibrio
INSTABILE

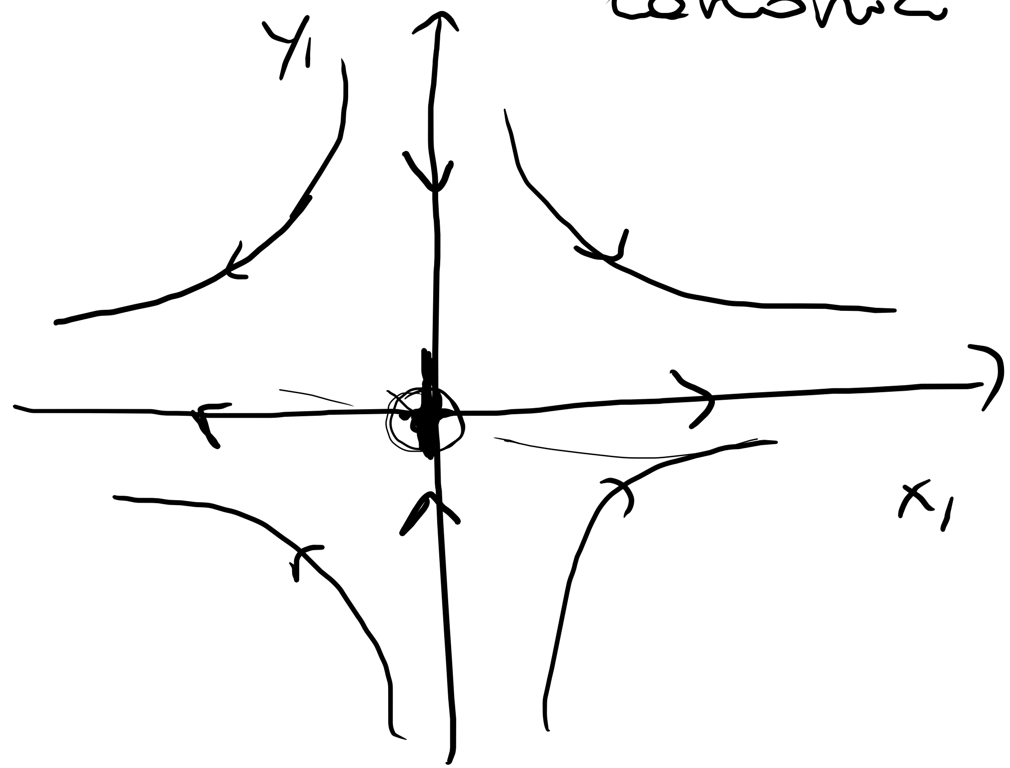


generale



$\boxed{\text{II}}$ m_1, m_2 discordi

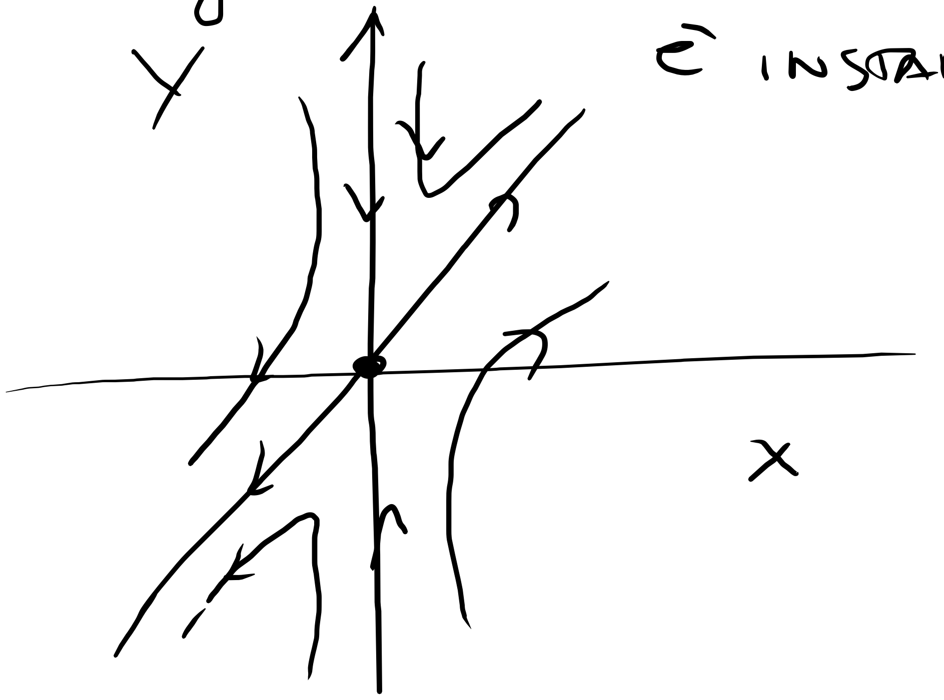
canonica



generale

$\boxed{\text{SELLA}}$

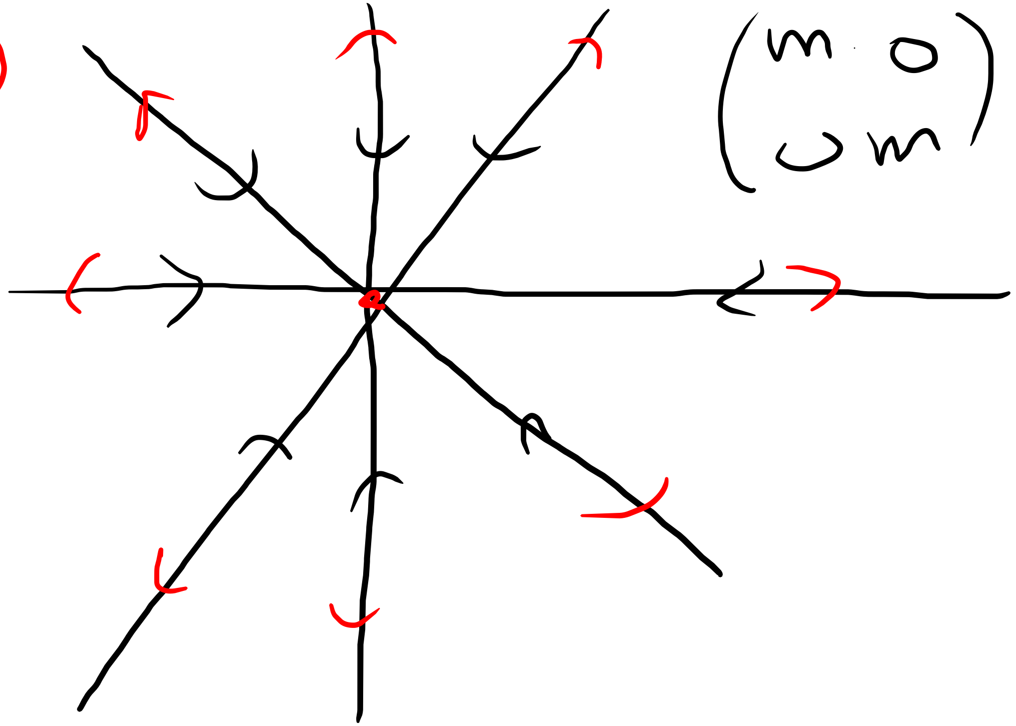
è INSTABILE



2

$\Delta = 0$ canonica $m_1 = m_2$

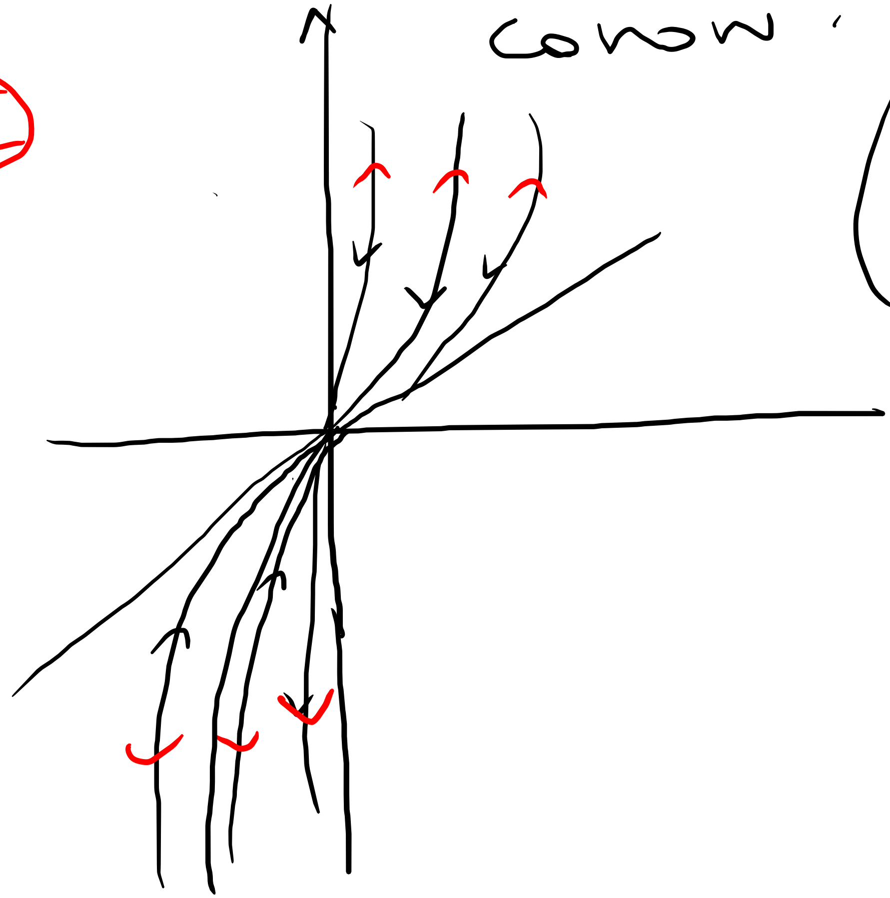
I



$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

canonica

II



$$\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

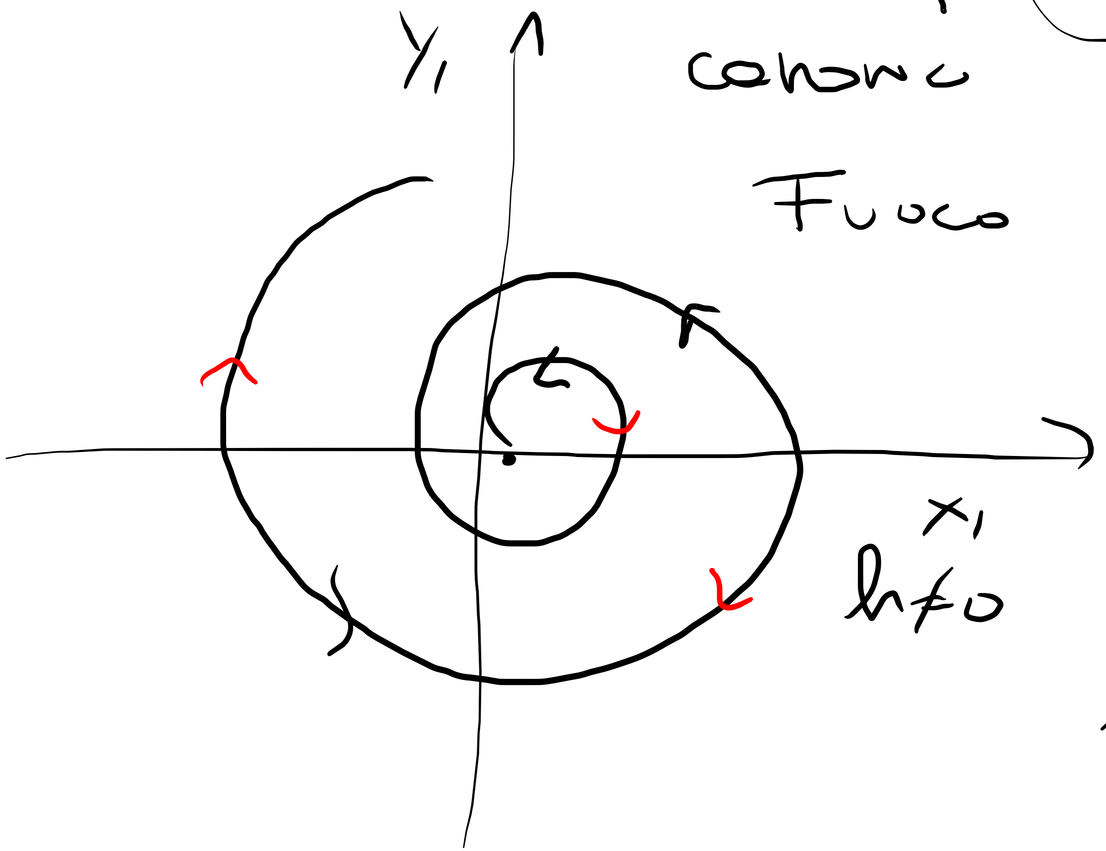
③ $\Delta < 0$ $\quad m_1, m_2$ non sono reali

$$p = \frac{h}{2} \qquad q = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$$

Canonica

Fuoco

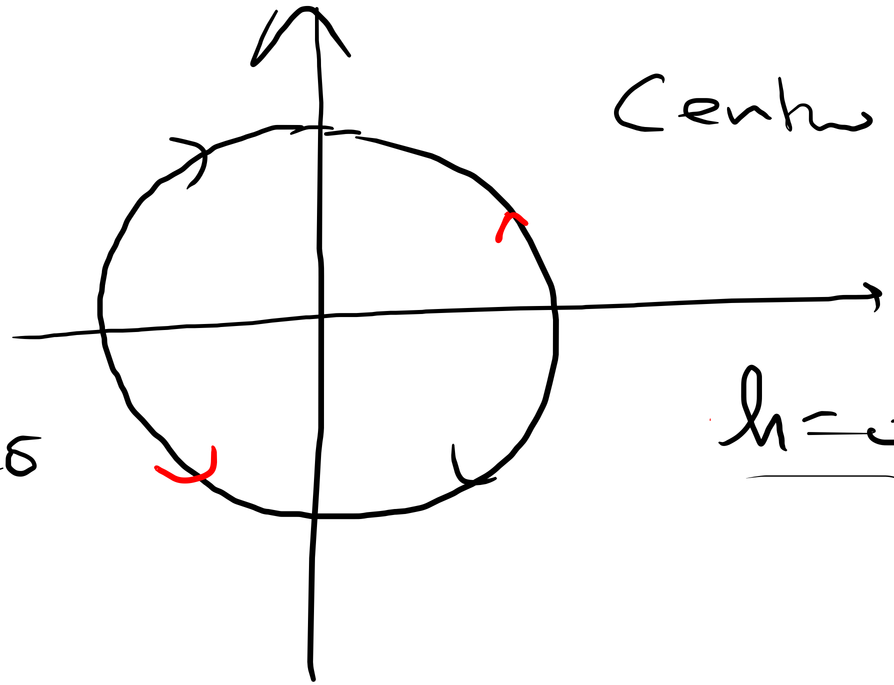


$h \neq 0$

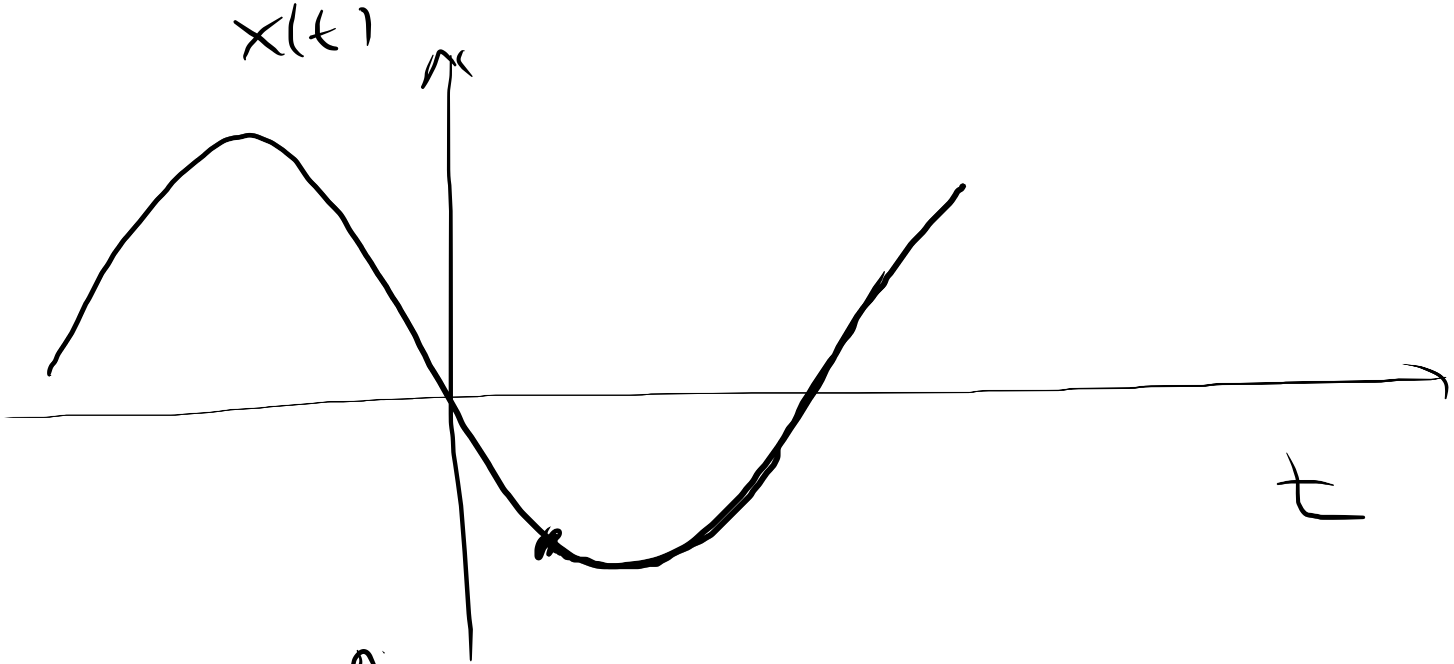
$h > 0$ INSTABILE

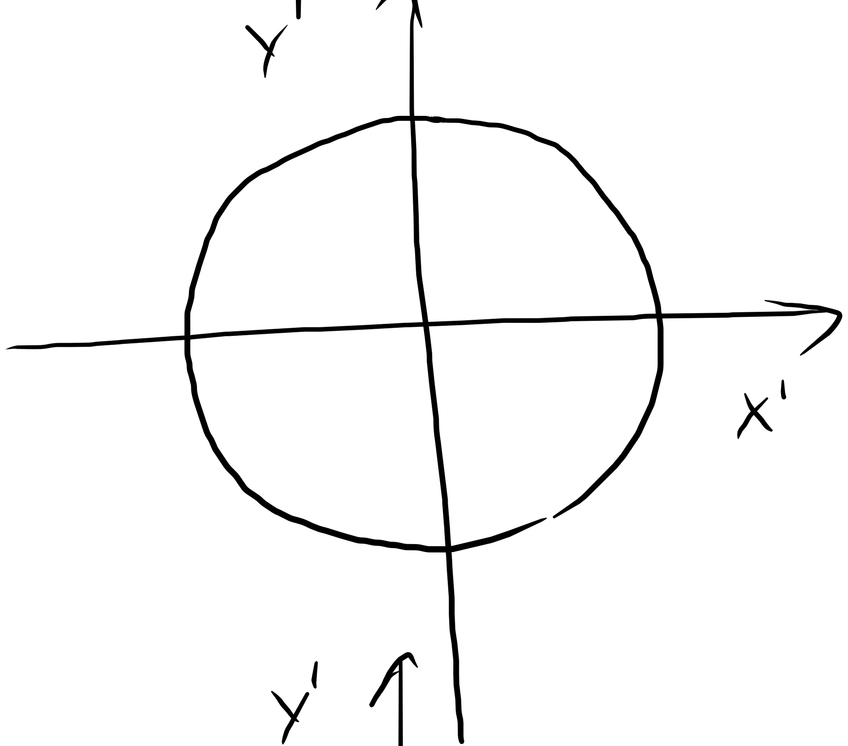
$h < 0$ STABILE

Centro

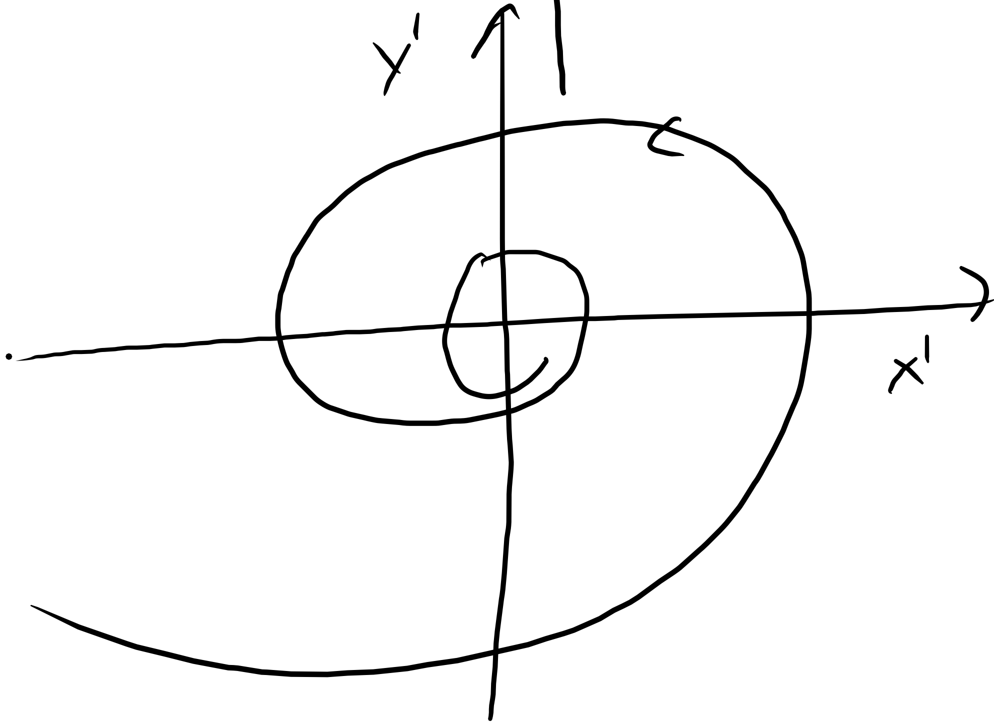


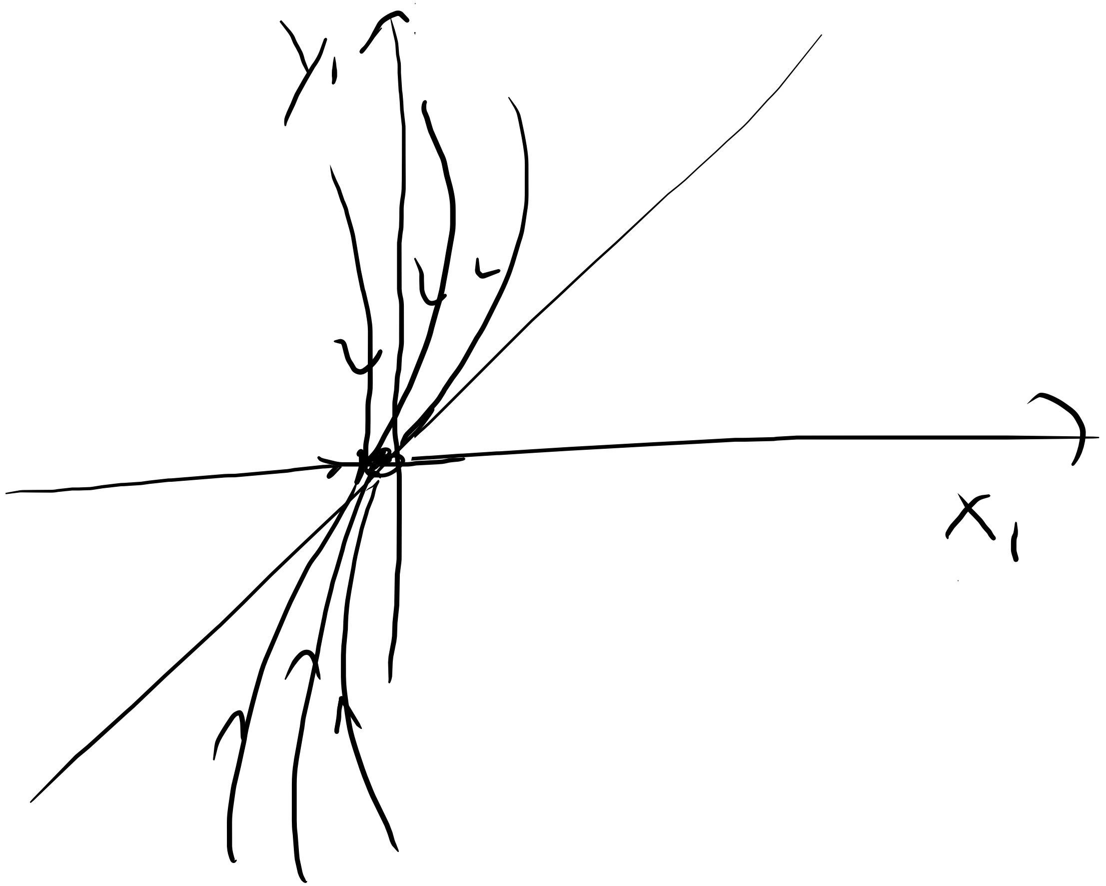
$h = 0$

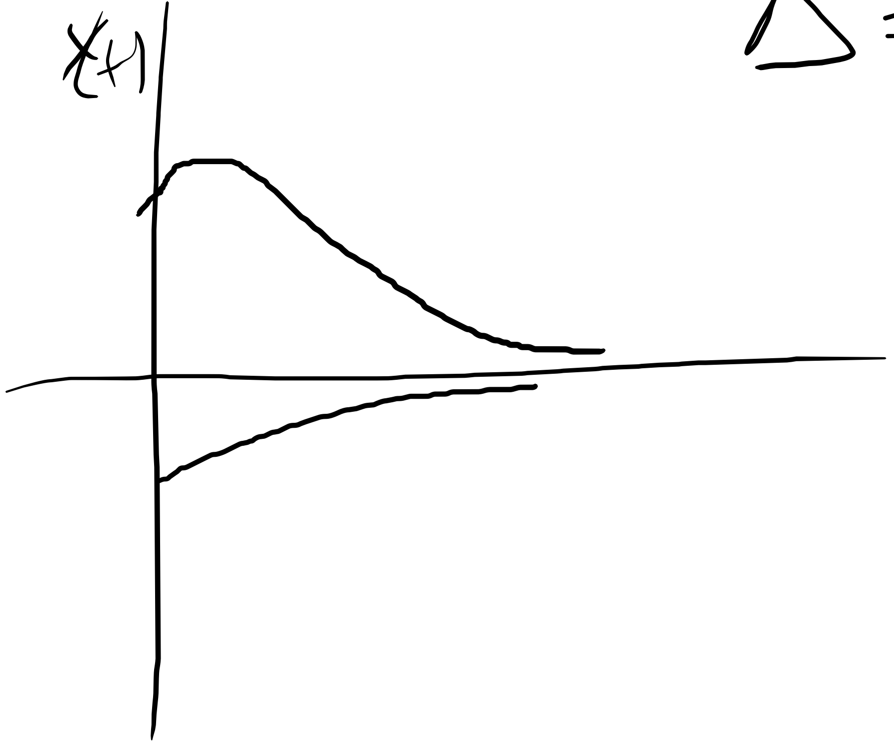

x(t)
t


y'
x'


x(t)
t


y'
x'





$$\Delta = 0$$

$$\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

$$\boxed{h^2 - 4k = \Delta}$$

$$\boxed{k = \frac{h^2}{4}}$$

$$h = \mathrm{tr}A = m_1 + m_2$$

$$k = m_1 \cdot m_2$$

Esempi NUMERICI

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$$

2 popolazioni in competizione

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$a = 1 \quad b = -1 \quad c = -4 \quad d = 1$

$h = 2 \qquad k = 1 \cdot 1 - (4 \cdot) = -3$

$\Delta = h^2 - 4k = (a-d)^2 + 4bc$

$= 4 + 12 = 16 > 0$

Origine è SELLA

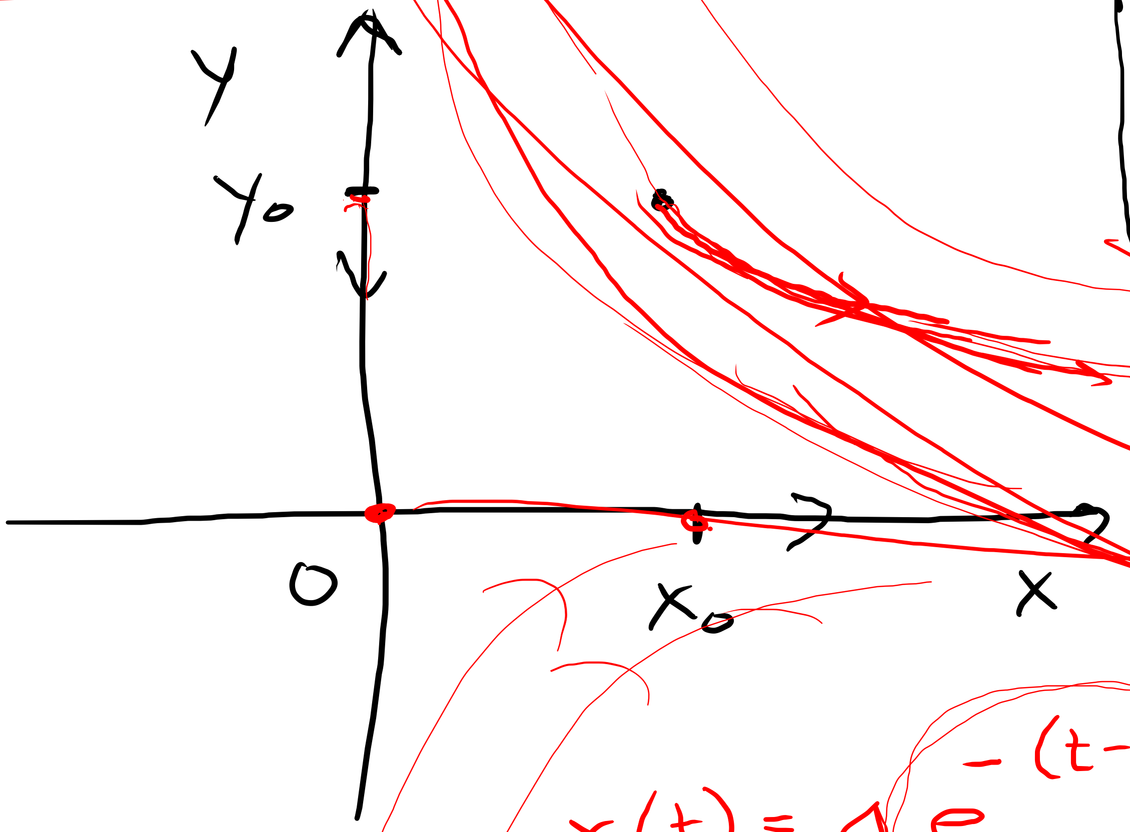
in quanto $m_2 < 0 < m_1$

$m_1 = \dfrac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3 \qquad m_2 = \dfrac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1$

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + y \end{cases}$$

$x(t_0) = 5 = x_0$

$y(t_0) = 6$



$$x(t) = A \cdot e^{-(t-t_0)} + B e^{3(t-t_0)}$$

$$x(t_0) = 5$$

$$A + B = 5$$

$$y(t) = \tilde{A} e^{-(t-t_0)} + \tilde{B} e^{3(t-t_0)}$$

$$\tilde{A} + \tilde{B} = 6$$

$$\boxed{\begin{matrix} A = 4 & B = 1 \\ \tilde{A} = 8 & \tilde{B} = -2 \end{matrix}}$$

$$x(t) = 4 e^{-(t-t_0)} + 1 \cdot e^{3(t-t_0)}$$

$$y(t) = 8 e^{-(t-t_0)} - 2 e^{3(t-t_0)}$$

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x - y \end{cases}$$

$x(t_0) = 5$

$y(t_0) = 6$

$x(t) = \underset{\sim}{A} \cdot e^{-2(t-t_0)} + Be^{0}$

$y(t) = Ae^{-2(t-t_0)} + B$

$\boxed{m_1 = -2 \qquad m_2 = 0}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$x'(t) = -2x(t)$

$y'(t) = 0$

$\Delta = 4 > 0$

$m_1 = \dfrac{2 - \sqrt{4}}{2} = 0 \qquad m_2 = -\dfrac{2+2}{2} = -2$

$x(t_0) = 5 = \underline{A + B}$

$\boxed{x' + y' = 0}$

$(x+y)' = 0$

$x + y = \cancel{C}$

$y = \cancel{C} - x$

$y' = -x'$

Predatore - prede

Prede $\rightarrow$ / Predatore $\rightarrow$

$$\begin{cases} \underline{x'} = \cancel{x} - y \\ y' = \underline{2x} - y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = (a+d)^2 + 4bc =$$

$$= 4 + 4 \cdot (-2) = -4 < 0$$

Fuoco oppure **Centro** $h = 0$

$$x(t) = \cancel{e^{-ht}} \cdot \left(A \cdot \cos(kt + t_0) + B \operatorname{sen}(kt + t_0)\right)$$

$x_0 = 10$

$y_0 = 3$

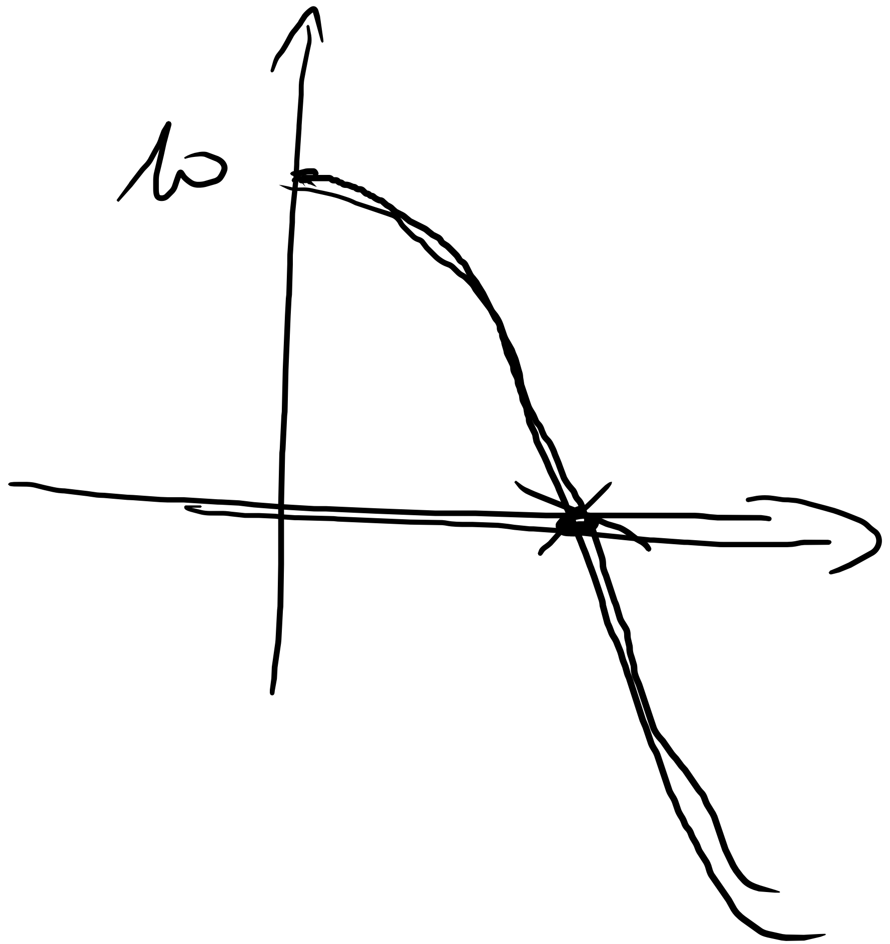
$A = 10 \quad B = 0$

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

$$\underline{x(t) = 10 \cos(t)}$$

$$y(t) = 10 \cos t + 10 \operatorname{sen} t$$

$$\tilde{A} = 10 \qquad \tilde{B} = 10$$



Un modello più veritiero che descriva due popolazioni di cui uno è preda e l'altro è predatore è il seguente

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = cxy - dy \end{cases}$$

a, b, c, d costanti reali positive

Lotka-Volterra

NON è LINEARE

(è autonomo e a coefficienti costanti)

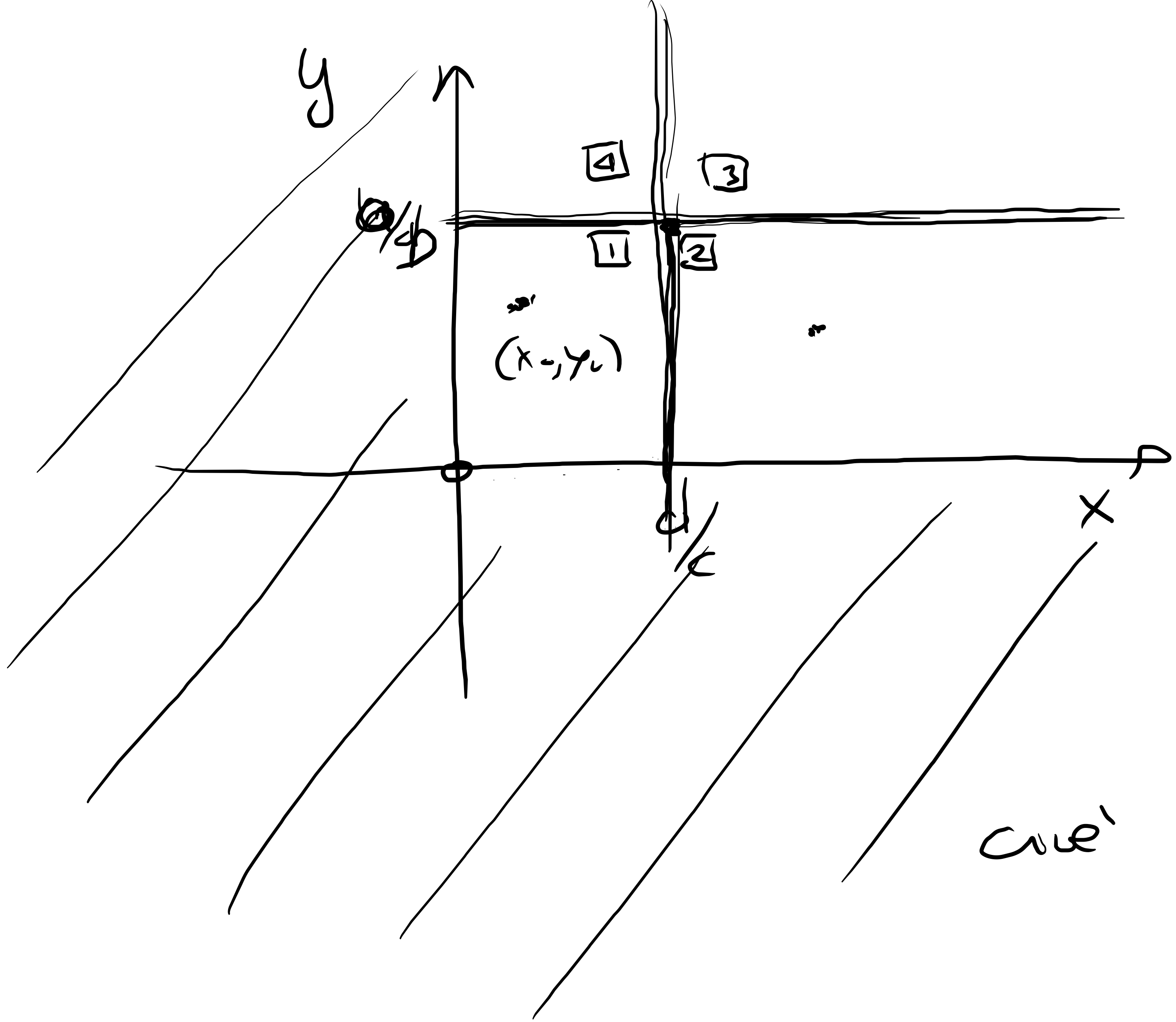
Anche se non siamo in grado di scrivere soluzioni esplicite, possiamo cercare una descrizione qualitativa delle curve nel piano delle fasi

$$\begin{cases} x' = \underline{ax} - \underline{bxy} = x\cdot(a - by) \\ y' = cyx - dy = y\cdot(cx - d) \end{cases}$$

se considero i punti critici o di equilibrio

ce ne sono $(0,0)$ $\left(\frac{d}{c}, \frac{b}{a}\right)$

$c \neq 0$ $a \neq 0$



a, b, c, d positivi

$$\begin{cases} x' = x \cdot (a - by) \\ y' = y \cdot (cx - d) \end{cases}$$

Se (x_0, y_0) è in $\boxed{1}$

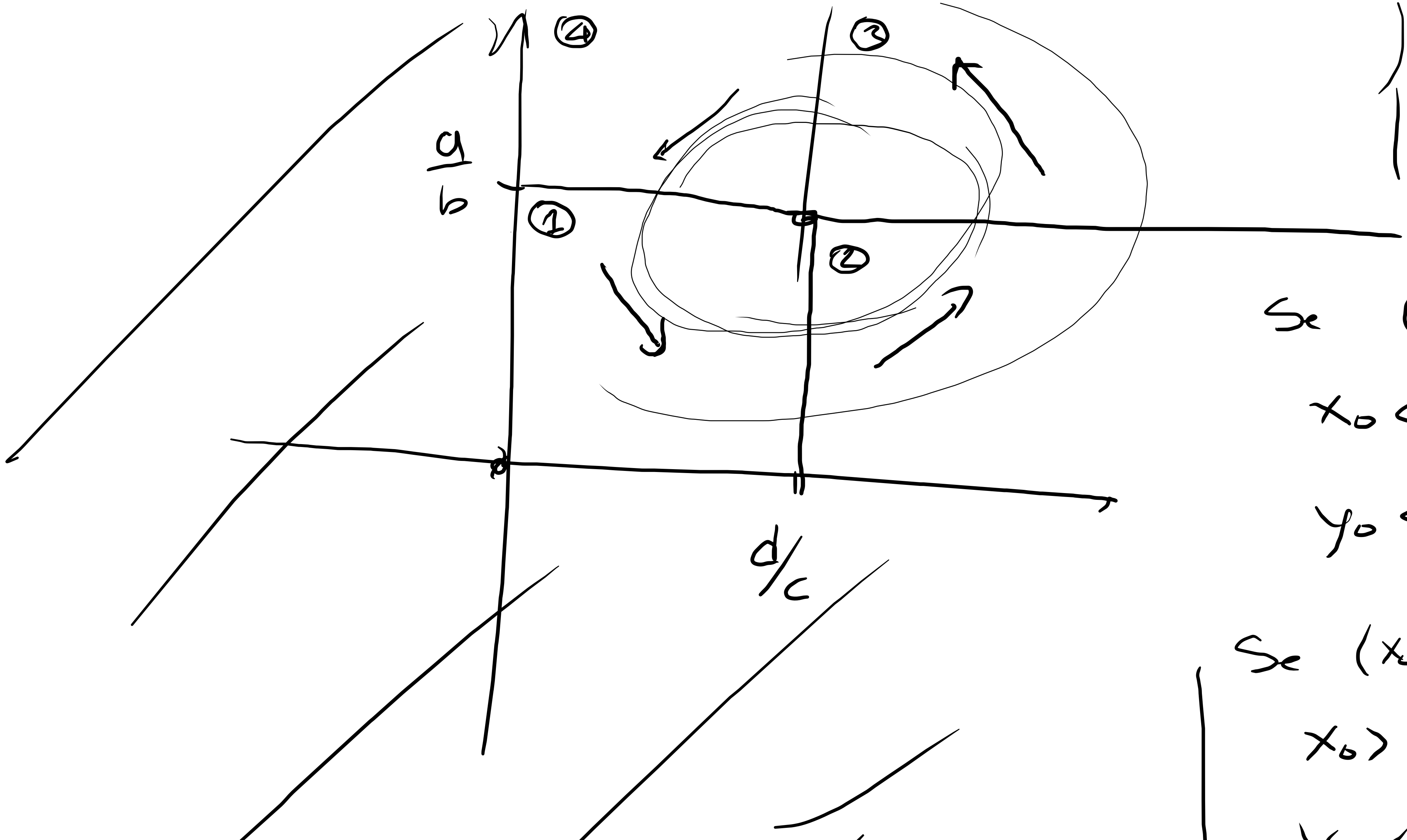
allora $x_0 < d/c$

$y_0 < a/b$

cioè $x' > 0$

$y' < 0$

$$\begin{cases} x' = x(a-by) \\ y' = y(cx-d) \end{cases}$$



Se (x_0, y_0) in 1

$x_0 < d/c \Rightarrow y' < 0$

$y_0 < a/b \Rightarrow x' > 0$

Se (x_0, y_0) in 2

$x_0 > d/c \Rightarrow y' > 0$

$y_0 < a/b \Rightarrow x' > 0$

Se (x_0, y_0) in 3

allora

$y' > 0 \Leftarrow x_0 > d/c$ e $y_0 > a/b \Rightarrow x' < 0$

Modello ANCORA più vero Predatore-Preda

$$\begin{cases} x' = \underbrace{ax - Ax^2}_{\text{Logistica}} - \alpha x \cdot y \\ y' = by - By^2 - \beta xy \end{cases}$$

NON LINEARI

$a, A, \alpha > 0$

In questo caso si trovano 4 equilibri

$(0,0)$ $\quad (0, b/B)$ $\quad \left(\frac{a}{A}, 0\right)$ $\quad (X_0, Y_0)$

$$X_0 = \frac{aB - \alpha b}{AB - \alpha\beta} \qquad Y_0 = \frac{Ab - a\beta}{AB - \alpha\beta}$$

Teorema di Linearizzazione

Sia dato un sistema differenziale autonomo di due eq. differenziali del primo ordine

$$\begin{cases} x' = \Phi_1(x,y) \\ y' = \Phi_2(x,y) \end{cases}$$

$\Phi_1 \; U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Phi_2 : U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ intorno di (x_0,y_0)

Sia (x_0, y_0) un punto di equilibrio di detto sistema, ovvero $\Phi_1(x_0,y_0) = 0 = \Phi_2(x_0,y_0)$, che risulti ISOLATO

ovvero $\Phi_1^2(x,y) + \Phi_2^2(x,y) \neq 0$ se $(x,y) \in I(x_0,y_0) \setminus \{(x_0,y_0)\}$

Se poniamo $x_1 = x - x_0$ $\quad y_1 = y - y_0$

sarà anche $\underline{x_1'} = \underline{x'}$ $\quad y_1' = y'$ e quindi

andremo a considerare un nuovo sistema differenziale

equivalente al precedente

$$\begin{cases} x' = x_1' = \Phi_1(x_1 \overset{x_0}{,} y_1 \overset{y_0}{}) \\ y' = x_2' = \Phi_2(x_1 \overset{x_0}{,} y_1 \overset{y_0}{}) \end{cases}$$

Se Φ_1 e Φ_2 sono DIFFERENZIABILI in (x_0, y_0)

allora

$$\Phi_1(x,y) = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\boxed{\Phi_1(x_0,y_0)}} + \overset{=a}{\frac{\partial}{\partial x}\Phi_1(x_0,y_0)}(x-x_0) +$$

$$+ \underset{=b}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x_0,y_0)} \cdot (y-y_0) + \sigma\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

$$\Phi_1(x_1-x_0, y_1-y_0) = a\,x_1 + b\,y_1 + \sigma\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)$$

Similmente

$$\Phi_2(x_1-x_0, y_1-y_0) = \underset{\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x_0,y_0)}{c}\,x_1 + \underset{\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x_0,y_0)}{d}\,y_1 + \sigma\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)$$

Pertanto

$$\begin{cases} \boxed{x_1' = a x_1 + b y_1} + o\left(\sqrt{x_1^2 + y_2^2}\right) \\ \boxed{y_1' = c x_1 + d y_1} + o\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right) \end{cases}$$

è detto SISTEMA LINEARIZZATO

(è lineare ed autonomo)

Se l'origine $\left(\begin{array}{l} \text{nelle coordinate } x_1, y_1 \\ x_1 = x - x_0 \quad y_1 = y - y_0 \end{array}\right)$ (ovvero in (x_0, y_0))
è un NODO, punto di SELLA o un FUOCO del sistema LINEARIZZATO
allora (x_0, y_0) è NODO, punto di SELLA o FUOCO del SISTEMA INIZIALE.

Nulla si può dire se (x_0, y_0) è un <u>CENTRO</u>.

<u>Applichiamo</u> il precedente risultato al sistema

$$\begin{cases} x' = ax - Ax^2 - \alpha xy = \Phi_1(x,y) \\ y' = bx - Bx^2 - \beta xy = \Phi_2(x,y) \end{cases}$$

Φ_1, Φ_2 sono polinomiali e quindi differenziabili in $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \underline{a - 2xA - \alpha y} \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = -\beta y$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \underline{-\alpha x} \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = b - 2yB - \beta x$$

1 $(0,0)$ è uno dei 4 punti di equilibrio e in questo caso il sistema linearizzato ha

$$a = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(0,0) = a \qquad b = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$c = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(0,0) = d = b$$

$$\begin{cases} x_1' = a x_1 + R \\ y_1' = b y_1 + R \end{cases}$$

a, b posit

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ è NODO INSTABILE

② $\left(0, \frac{b}{\beta}\right)$

$$a = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}\left(0, \frac{b}{\beta}\right) = a - \alpha \frac{b}{\beta}$$

$$b = \frac{\partial \phi_1}{\partial y}\left(0, \frac{b}{\beta}\right) = 0$$

$$c = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}\left(0, \frac{b}{\beta}\right) = -\frac{\gamma b}{\beta}$$

$$d = \frac{\partial \phi_2}{\partial y}\left(0, \frac{b}{\beta}\right) =$$

$$= b - 2\cancel{\beta}\frac{b}{\cancel{\beta}} = -b$$

$$\begin{pmatrix} a - \frac{\alpha b}{\beta} & 0 \\ -\beta \frac{b}{\beta} & -b \end{pmatrix}$$

è un nodo asintotico stabile se

$$a - \frac{\alpha b}{\beta} < 0 \iff \frac{a}{b} < \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\frac{a}{\alpha} < \frac{b}{\beta}$$

③

④

$$\begin{cases} x' = \Phi_1(x,y) \\ y' = \Phi_2(x,y) \end{cases} \leadsto \quad \begin{aligned} x_1' &= \underbrace{a x_1 + b y_1} + \cancel{R_1} \\ y_1' &= \underbrace{c x_1 + d y_1} + \cancel{R_2} \end{aligned}$$

$$\left(a = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x_0,y_0), \quad b = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x_0,y_0) \right) = \text{grad}\, \Phi_1(x_0,y_0)$$

$$\text{grad}\, \Phi_2(x_0,y_0) = \left(c = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}, \; d = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$\hookrightarrow$ Jacobiano della $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)(x_0,y_0)$

$$\begin{cases} x' = axy - bx \\ y' = -axy + \cancel{bx} \end{cases}$$

INFETTI

SUSCETTIBILI

a, b coefficienti costanti positivi

SIR

SIS

$\boxed{x' + y' = 0}$

$\boxed{x + y = N}$

$y = N - x$

$$\boxed{x' = ax \cdot (N - x) - bx} = \underbrace{x\,(aN - b - ax)}$$

$x = 0$

$x = \frac{-b + Na}{a}$

$= -\frac{b}{a} + N$

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = x - y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$x(t_0) = 5$

$y(t_0) = 6$

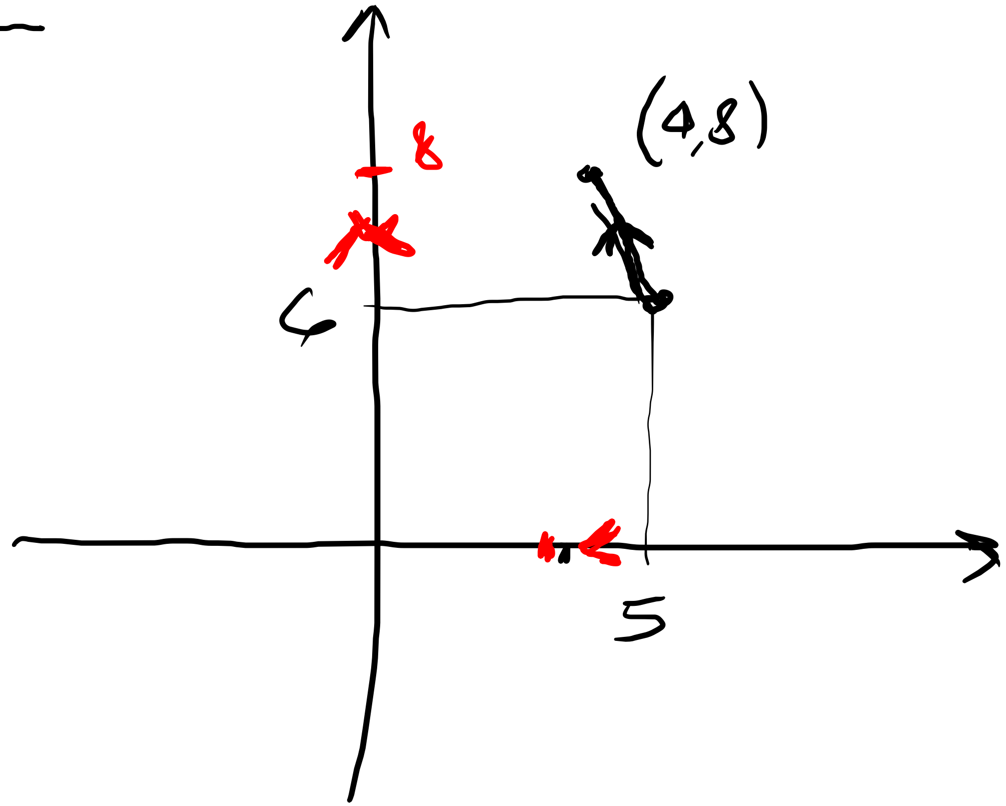
$\Delta = (a-d)^2 + 4bc = 4$

$m_1 = 2 \quad \boxed{m_2 = 0}$

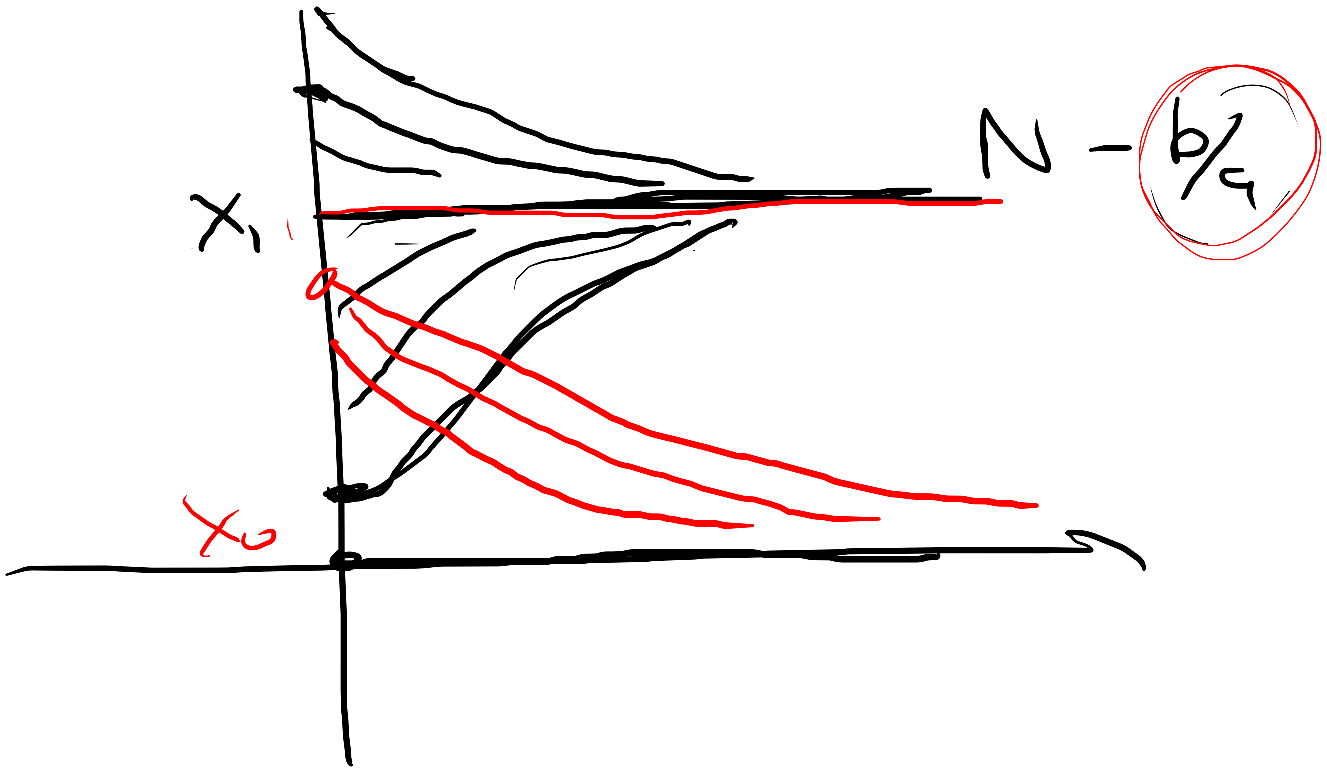
popolazioni di specie in collaborazione

cooperazione

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2(t-t_0)} + 4 \\ y(t) = -2e^{-2(t-t_0)} + 8 \end{cases}$$



$x_0 = 0 \qquad x_1 = N - b/a$



$F'(x_1)$

$F(x) = x\,(Na - b - ax)$

$F'(x) = Na - b - ax + x(-a)$

$= Na - b - 2ax$ >0 <0

$x_1 = N - b/a$

In generale dal caso di 2 eq. differenziali del primo ordine si può passare al caso di n equazioni differenziali del primo ordine in forma normale

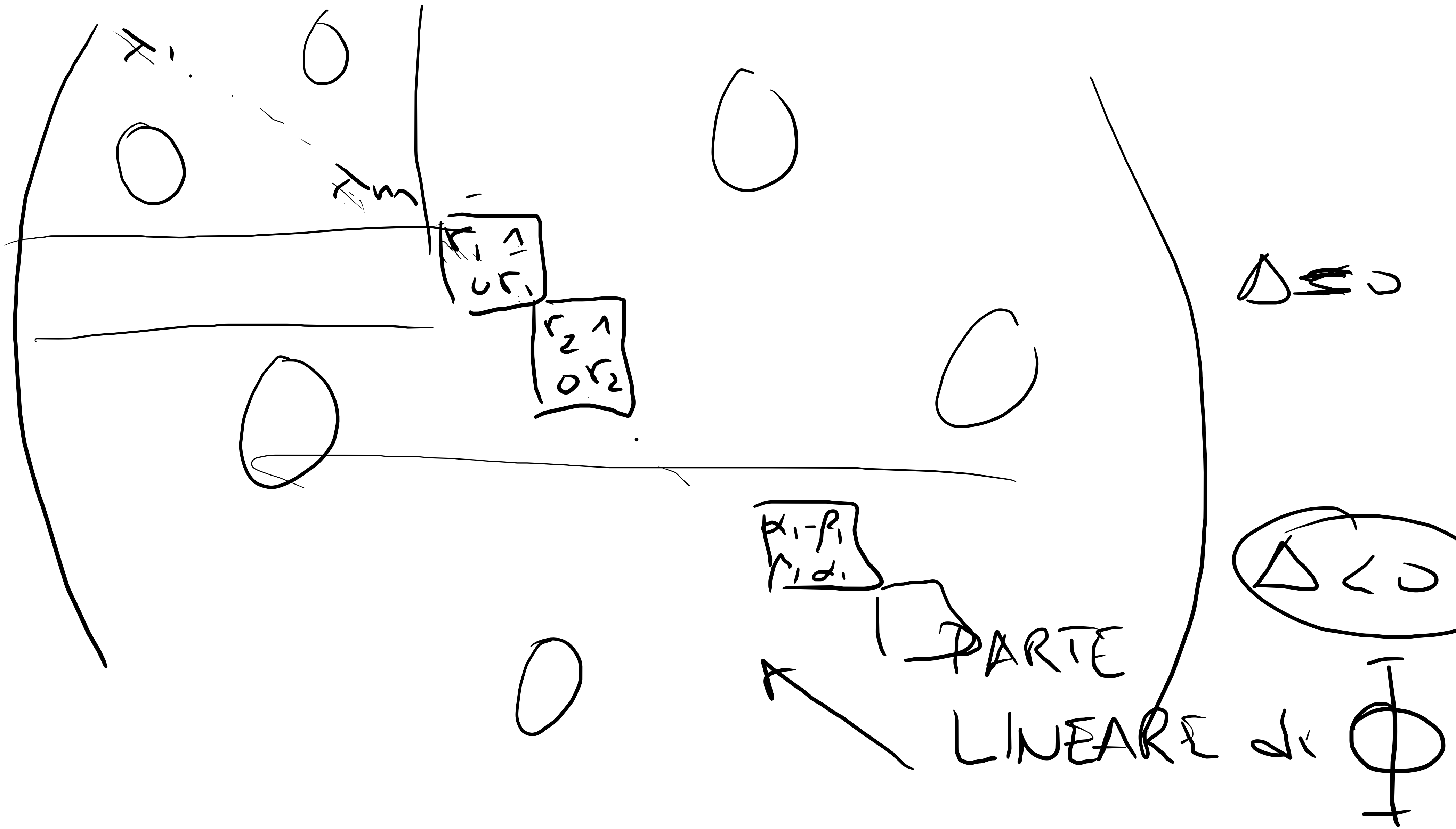
$$\begin{cases} x_1' = \Phi_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ x_2' = \Phi_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ x_n' = \Phi_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{cases}$$

$(x_1 \ldots x_n)$

$$X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \Phi(X, t)$$

Teorema Linearizzazione generale (SIST. Autonomo)

$\Delta > 0$



$\Delta \leq 0$

$\Delta < 0$

generale