ESERCIZIO N. 2. Si consideri

$g(t)$ $\qquad$ $g(t) \geq 0$ in $t > 0$

$$f(x) = \int_0^x \underbrace{e^{-\frac{1}{t^2}} \frac{1+t}{1+t^2}}_{g(t)} dt$$

Si determinino (spiegando come si ottengono le risposte):

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

$g(t) \notin L([0,+\infty))$ perché $\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{\frac{1}{t}} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

per $x << -1$ $\quad f(x) = \int_0^{-1} g(t)\,dt + \int_{-1}^x g(t)\,dt$ e siccome

$g \notin L((-\infty,-1]) \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \int_{-1}^x g(t)\,dt = -\lim_{x\to-\infty} \int_x^{-1} g(t)\,dt = +\infty$

$f(0) = 0$

- stabilire dove f cresce e dove decresce;

$g \in C^0(\mathbb{R})$ ponendo $g(0) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{1+x}{1+x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$0, -1$ sono i punti critici

$f'(x) < 0$ per $x < -1$, $\quad f'(x) \geq 0$ per $x \geq -1$,

$f'(x) > 0$ per $-1 < x < 0$, $\quad f'(0) = 0$, $\quad f'(x) > 0$ per $x > 0$

- determinare il numero 2 degli zeri di f; $\qquad f(-1) < f(0) = 0$

Siccome $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e f è strettamente decrescente e continua in $(-\infty,-1] \Rightarrow \exists$ ed è unico uno zero di f in $(-\infty,-1)$

Analogamente, in $[-1,+\infty)$ f è strettamente crescente, allora 0 è l'unico zero di f in $[-1,+\infty)$.

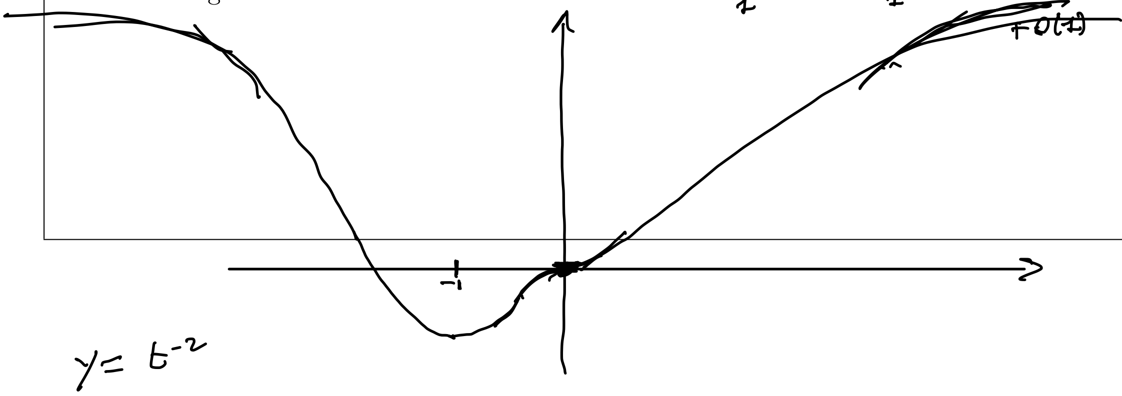
- stabilire se ci sono rette asintotiche; $\qquad x \geq 1 \quad f(x) = \int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^x g(t)\,dt$

$$\int_1^x e^{-\frac{1}{t^2}} \frac{1+t}{1+t^2}\,dt = \int_1^x \left(1 - \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \frac{1}{t} \frac{1+t^{-1}}{(1+t^{-2})}\,dt =$$

$$= \int_1^x \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)(1+t^{-1})(1 - t^{-2} + o(t^{-2}))\,dt = \int_1^x \frac{1}{t}(1 + t^{-1} + o(t^{-1})) = \int_1^x \frac{1}{t} +$$

$$+ \int_1^x t^{-2} + \int_1^x o(t^{-2}) = \lg x + C + o(1)$$

- tracciare il grafico.



$y = t^{-2}$

$$\frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + o(y^2)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x^j + o(x^n) = 1 - x + o(x)$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

è continua in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$y=\frac{1}{x^2}$$

$$=\lim_{y\to+\infty} e^{-y} = 0$$

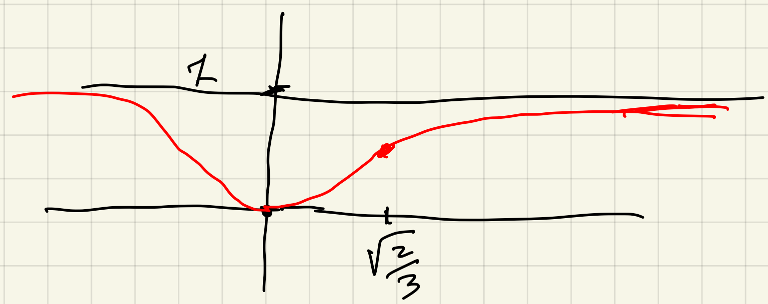
$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\overset{=0}{f(0)}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} f'(x)$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}}\,\frac{2}{x^3} = 0$$

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f^{(n)}(0)=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1$$



$$f'(x)=\frac{2}{x^3}\,e^{-\frac{1}{x^2}}>0$$

per $x>0$

$$f''(x)=\left(\frac{2}{x^3}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' =$$

$$= -\frac{6}{x^4}\,e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3}\,\frac{2}{x^3}\,e^{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}^6}\left(-3x^2+2\right) = 0$$

$$3x^2=2$$

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ____________

Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1+2t+2t^2+t^3}\,dt & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{1+x^2}-1-x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- si calcolino $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

$f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1 + |x| \xrightarrow{x\to-\infty} +\infty$

$\frac{1-t}{1+2t+t^2+t^2(1+t)} = \frac{1-t}{(1+t)^2+t^2(1+t)} = \frac{1-t}{(1+t)(1+t+t^2)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t+t^2}$ $\quad A = \frac{1-t}{1+t+t^2}\Big|_{t=-1} = 2 = -B$

$= \frac{2(1+\cancel{t+t^2}) - 2t(\cancel{1+t}) + C(1+t)}{(1+t)(1+t+t^2)} = \frac{2+C+Ct}{\text{denom}}$ $\quad C = -1$

$f(x) = \int_0^x \frac{2}{1+t} - \int_0^x \frac{2t+1}{1+t+t^2}\,dt = \lg(1+x)^2 - \lg(1+x+x^2) = \lg\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

- si calcoli $f'(x)$ dove é definito e si trovino eventuali punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+2x+2x^2+x^3} & \text{se } x > 0 \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 & x < 0 \end{cases}$

$f'_d(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} f'(x) = 1$

$f'_s(0) = \lim_{x\to0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^-} f'(x) = -1$

$f'(1) = 0$ $\qquad f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$ per $x > 1$, $f'(x) < 0$ per $x < 0$

- si stabilisca dove $f(x)$ e' concava e dove e' covessa;

$x > 0$ $\quad f''(x) = \frac{-(1+2x+2x^2+x^3) - (1-x)(2+4x+3x^2)}{(\dots)^2} = \frac{-(1+2x+2x^2+x^3) - (2+4x+3x^2-2x-4x^2-3x^3)}{(\dots)^2}$

$2+2x-x^2-3x^3$

$= \frac{-3-4x-x^2+2x^3}{(\dots)^2} = f''(x)$ per $x > 0$

$x < 0$ $\quad f''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac32}}\left[1+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}\right] = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac32}} > 0$

- si stabilisca se esistono rette asintotiche e si tracci il grafico .

$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-1+|x|}{-|x|} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}}{-|x|} + \frac{1}{|x|} - 1\right] = -2$

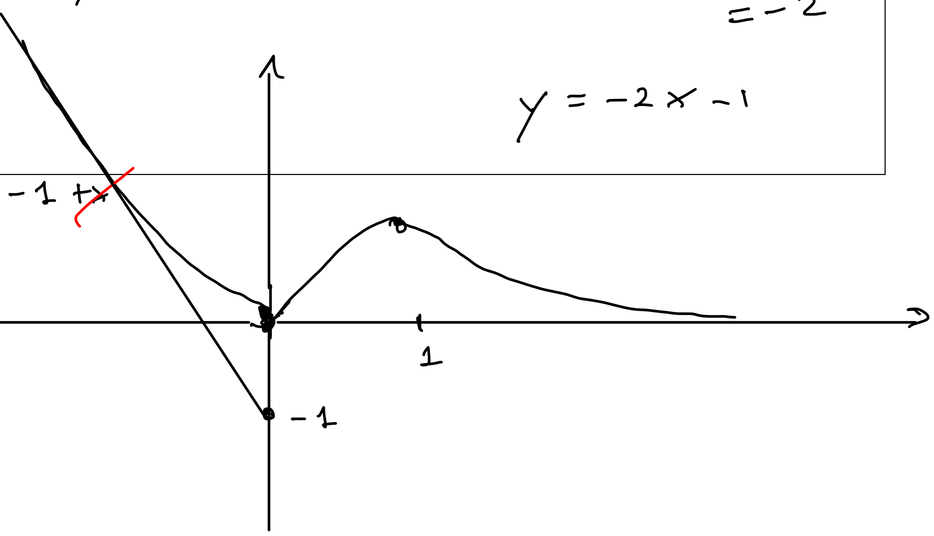
$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+|x|^2} - 1 - x + 2x\right) = -1$

$-x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac12} - 1 + x =$

$= -x\left(\cancel{1} + \frac12\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - 1 + \cancel{x}$

$\xrightarrow{x\to-\infty} -1$

$y = -2x - 1$



ESERCIZIO N. 4. Calcolare le derivate di ogni ordine in 0 di $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$.

$$e^y = \sum_{j=0}^{n} \frac{y^j}{j!} + o(y^n) \qquad e^{-t^2} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{t^{2j}}{j!} + o(t^{2n})$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \int_x^{2x} t^{2j}\,dt + \int_x^{2x} o(t^{2n})\,dt$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \left.\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_x^{2x} + o(x^{2n+1})$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{(2^{2j+1}-1)}{2j+1} x^{2j+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^{2x} o(t^{2n})\,dt}{x^{2n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,o((2x)^{2n}) - o(x^{2n})}{(2n+1)\,x^{2n}} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^{2n})}{(2n+1)\,x^{2n}} = 0$$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare $\int_0^1 \arctan(x)x^2dx$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

$$f^{(2j)}(0) = 0 \quad \forall j$$

$$\frac{f^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!} = \frac{(-1)^j}{j!} \frac{(2^{2j+1}-1)}{(2j+1)}$$

$$\frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{|w|^2}$$

ESERCIZIO N. 2. Risolvere la disuguaglianza $Im\left(\frac{z^2}{1-z}\right) > 0$, anche tracciando nel piano l'insieme delle soluzioni.

$$\frac{z^2}{1-z} = z^2 \, \frac{1-\overline{z}}{|1-z|^2} = \frac{z^2 - z z \overline{z}}{|1-z|^2}$$

$$= \frac{z^2 - z|z|^2}{|1-z|^2} \qquad z = x+iy$$

$$= \frac{x^2-y^2+2ixy-(x+iy)(x^2+y^2)}{|1-z|^2}$$

$$Im\left(\frac{z^2}{1-z}\right) = Im \, \frac{\cancel{x^2}-\cancel{y^2}+2ixy-\cancel{x(x^2+y^2)}-iy(x^2+y^2)}{|1-z|^2}$$

$$= \frac{2xy - y(x^2+y^2)}{|1-z|^2} > 0$$

$$2xy - y(x^2+y^2) > 0$$

$$y(2x - x^2 - y^2) > 0$$

$$y(x^2+y^2-2x) < 0$$

$$y(x^2+y^2-2x) = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2+y^2-2x = 0 \\ (x-1)^2 - 1 + y^2 = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$y(x^2+y^2-2x) < 0$$

$$x^2+y^2-2x = (x-1)^2+y^2-1 < 0$$