# Lezione 30 Proiezione ortogonale

**Prop** Sia $V$ uno spazio vettoriale Euclideo e $U \subset V$ un sottospazio vettoriale. Supponiamo $\dim V < \infty$.
Allora $\forall\, v \in V \ \exists!\ v' \in U$ e $v'' \in U^\perp$ t.c. $v = v' + v''$

**Dim** Esistenza $(u_1, \dots, u_k)$ base ortonormale di $U \overset{\text{estensione ortonormale}}{\rightsquigarrow}$ $(u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale di $V$. $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = n-k$
$\Rightarrow (u_{k+1}, \dots, u_n)$ base ortonormale di $U^\perp$. Si ha:

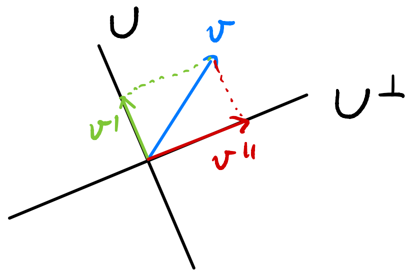
$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i$$

$$v' := \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i \rangle u_i \in U, \quad v'' := \sum_{i=k+1}^{n} \langle v, u_i \rangle u_i \in U^\perp \Rightarrow v = v' + v''.$$

Unicità $v = v' + v'' = w' + w''$ con $v', w' \in U$, $v'', w'' \in U^\perp$

$$\Rightarrow \underbrace{v' - w'}_{\in U} = \underbrace{w'' - v''}_{\in U^\perp} \in U \cap U^\perp = \{0_V\} \Rightarrow v' = w', \quad v'' = w''.$$

**Def** $v'$ è detta proiezione ortogonale di $v$ su $U$ o anche componente di $v$ lungo $U$. $v''$ è detta componente ortogonale di $v$ rispetto a $U$.




**OSS** $v \in U^\perp \iff v' = 0_V$
$v \in U \iff v'' = 0_V$
$\|v\| = \sqrt{\|v'\|^2 + \|v''\|^2}$

**Es** $U = \operatorname{span}(e_1 + e_2,\ 2e_1 + e_3) \subset \mathbb{R}^3$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$U : \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightsquigarrow U : x - y - 2z = 0 \Rightarrow U^\perp = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$w = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ base ortonormale di $U^\perp \rightsquigarrow v'' = \langle v, w \rangle w = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$v' = v - v'' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$.

# Geometria Euclidea del piano e dello spazio

$L \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio affine con giacitura $U \subset \mathbb{R}^n$ sottospazio vettoriale.

$\ell = \dim L = \dim U$

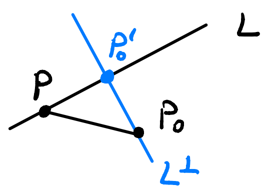
$P_0 \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow$ $L^\perp =$ sottospazio affine per $P_0$ con giacitura $U^\perp$

$$L^\perp = P_0 + U^\perp \Rightarrow \dim L^\perp = n - \ell$$

$U \cap U^\perp = \{0_V\} \Rightarrow L \cap L^\perp = P_0'$ <u>proiezione ortogonale di $P_0$ su $L$</u>

Si ha: per $P \in L \rightsquigarrow P_0' = P + (P_0 - P)'$ con $(P_0 - P)' \in U$

proiez. ortog. di $P_0 - P$ su $U$

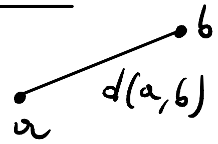



## Distanza

$V$ spazio vettoriale Euclideo

$d : V \times V \to \mathbb{R}$ è detta <u>distanza Euclidea</u>

$$d(a,b) := \|a - b\|$$



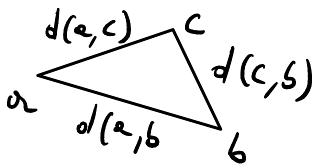

**Prop** Valgono le seguenti:

i) $d(a,b) \geq 0$ e $d(a,b) = 0 \iff a = b$

ii) $d(a,b) = d(b,a)$

iii) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ Disuguaglianza triangolare per la distanza

**Dim** (iii)



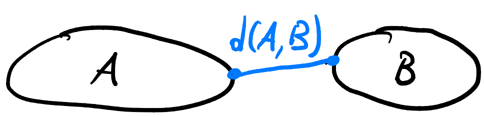

$$d(a,b) = \|a - b\| = \|a - c + c - b\| \leq$$

$$\leq \|a - c\| + \|c - b\| = d(a,c) + d(c,b).$$

Se $A, B \subset V$ sono sottoinsiemi non vuoti definiamo la distanza

$$d(A,B) := \inf \{ d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B \}$$

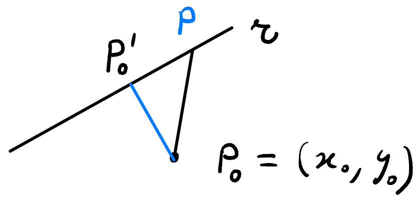
**OSS** $A \cap B \neq \emptyset \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} d(A,B) = 0$




Controesempio $d(]-\infty, 0[\,,\ ]0, +\infty[) = 0$ ma $]-\infty, 0[ \cap ]0, +\infty[ = \emptyset$

In $\mathbb{R}^n$: $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{d(a,b) = \|a-b\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}}$

**Es** $d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(1+5)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.




## Punto e retta nel piano $\mathbb{R}^2$

$P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$r: ax + by + c = 0 \rightsquigarrow N = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ versore normale a $r$

$\|N\| = 1$ $\quad N \perp r$

$P_0'$ = proiezione ortogonale di $P_0$ su $r$, $\quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r \quad ax + by + c = 0$

$$d(P_0, r) = d(P_0, P_0') = |\langle P_0 - P, N \rangle| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} |a x_0 + b y_0 \underbrace{- a x - b y}_{c}| \Rightarrow$$

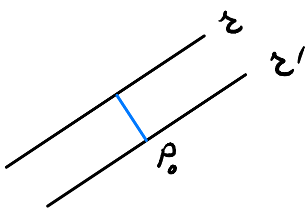
$$\boxed{d(P_0, r) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

## Rette parallele nel piano $\mathbb{R}^2$

$r: ax + by + c = 0 \qquad r': ax + by + c' = 0$

$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in r' \Rightarrow a x_0 + b y_0 = -c'$

$$d(r, r') = d(P_0, r') = \frac{|a x_0 + b y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$




## Punto e piano nello spazio $\mathbb{R}^3$

$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$L: ax + by + cz + d = 0$

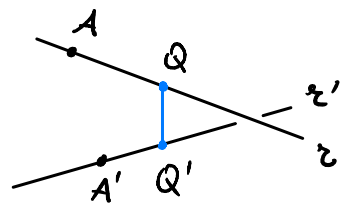
Ragionando come nel caso punto e retta in $\mathbb{R}^2$ si ottiene

$$d(P_0, L) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

__Due piani paralleli in $\mathbb{R}^3$__ formula analoga a quella per due rette parallele in $\mathbb{R}^2$

__Retta e piano paralleli in $\mathbb{R}^3$__ si sceglie un punto della retta e si calcola la distanza dal piano.

__Rette sghembe in $\mathbb{R}^3$__




$r : X = A + t v$

$r' : X = A' + t v'$ $\quad$ $\dim \operatorname{span}(v, v') = 2$

$\dim \operatorname{span}(v, v')^{\perp} = 1 \Rightarrow \operatorname{span}(v, v')^{\perp} = \operatorname{span}(w)$ per un certo $w \in \mathbb{R}^3$

$L = A + \operatorname{span}(v, v')$, $L' = A' + \operatorname{span}(v, v')$ piani paralleli t.c.

$r \subset L, \ r' \subset L' \Rightarrow d(r, r') = d(L, L')$

$H = A + \operatorname{span}(v, w)$, $H' = A' + \operatorname{span}(v', w)$

$r \subset H, \ r' \subset H' \rightsquigarrow Q = r \cap H', \ Q' = r' \cap H$

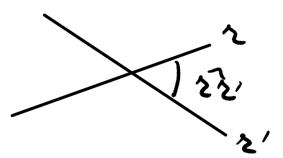
$\operatorname{span}(v, w) \cap \operatorname{span}(v', w) = \operatorname{span}(w)$ giacitura di $H \cap H'$

$Q, Q' \in H \cap H' \Rightarrow Q - Q' \in \operatorname{span}(w) \Rightarrow Q - Q' \perp \operatorname{span}(v, v') \Rightarrow$

$$\boxed{d(r, r') = d(Q, Q')}$$

$Q$ e $Q'$ sono detti __punti di minima distanza__ tra $r$ e $r'$.

## Angolo




__Due rette__ $r, r' \rightsquigarrow v, v'$ __vettori di direzione__ $\rightsquigarrow$

$$\widehat{rr'} := \arccos \frac{|\langle v, v' \rangle|}{\|v\| \, \|v'\|}$$

__Due piani in $\mathbb{R}^3$__ $L, L' \rightsquigarrow u, u'$ __vettori ortogonali__ $\rightsquigarrow \widehat{LL'} := \arccos \dfrac{|\langle u, u' \rangle|}{\|u\| \, \|u'\|}$

# Prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow X \times Y := \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è detto <u>prodotto vettoriale</u> di $X$ e $Y$.

<u>Es</u> $$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} e_2 & e_3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -e_2 + 2e_3 + 2e_1 - 3e_2 = 2e_1 - 4e_2 + 2e_3 =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$

Dalle proprietà del det si ha:

1) $X \times Y = -Y \times X$

2) $(X + X') \times Y = X \times Y + X' \times Y$

3) $X \times (Y + Y') = X \times Y + X \times Y'$

4) $X \times Y = 0_{\mathbb{R}^3} \iff X$ e $Y$ sono linearmente dipendenti

Ma $\times$ <u>non</u> è associativo: in generale $X \times (Y \times Z) \neq (X \times Y) \times Z$.

Si verifica con un calcolo diretto che

$$X \times Y \perp X \text{ e } Y \Rightarrow X \times Y \in \operatorname{span}(X, Y)^{\perp}.$$

Si ha inoltre
$$\|X \times Y\| = \|X\| \, \|Y\| \sin \widehat{XY}$$

Se $X$ e $Y$ sono lin. indip. il verso di $X \times Y$ si determina con la <u>regola della mano destra</u>: pollice verso $X$, indice verso $Y$, medio verso $X \times Y$ (perché è ciò che accade con la base $\mathcal{E}_3$).

**Es** 1) $r: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t \\ z = t+2 \end{cases}$ , $r': \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t+3 \end{cases}$ rette sghembe

$$r: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - z + 2 = 0 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2-2 = -4$$

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v \times v' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= e_1 - 2e_3 + e_1 - 2e_2 =$$

$$= 2e_1 - 2e_2 - 2e_3$$

$\rightsquigarrow w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ortogonale a $v$ e $v'$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in r, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in r'$$

$$H: \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z-2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad H: y - z + 2 = 0$$

$$H': \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z-3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad H': 2x + y + z - 3 = 0$$

$$Q = r' \cap H: \ -t - t - 3 + 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q' = r \cap H': \ 4t + 2 + t + t + 2 - 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{6} \Rightarrow Q' = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/6 \\ 11/6 \end{pmatrix}$$

$d(r, r') = d(Q, Q') = 1.$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ trovare base ortonormale diagonalizzante

$$p_A = |A - x I_3| = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)\left((2-x)^2 - 1\right) = (2-x)(3-x)(1-x)$$

$\lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3, \ \lambda_1 = 1$

Autovettori ...

3) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ autovalori $\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 0$

$\underline{\lambda_1 = 3}$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad x - y - z = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Non sono ortogonali $\rightsquigarrow$ Gram-Schmidt.