Geometria

Foglio di esercizi 9

1) Dire se le seguenti matrici sono ortogonali o ortogonali speciali.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Dimostrare che l'applicazione $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = (-x + y, x + y)$$

è lineare e autoaggiunta rispetto al prodotto scalare canonico. Scrivere la matrice A di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza f, e la matrice diagonale D di f in tale base. Determinare una matrice ortogonale speciale $P \in \mathrm{SO}(2)$, e la sua inversa, tale che $A = PDP^{-1}$.

3) Consideriamo la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che l'applicazione lineare $L_B \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^3$. Determinare una matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ e una matrice ortogonale $P \in \mathrm{O}(3)$, e la sua inversa, tale che $B = PDP^{-1}$.

4) Siano $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Poniamo $B = PAP^{-1}$. Dimostrare che

$$B^k = PA^kP^{-1}$$

per ogni intero $k \geq 1$. Usare questo fatto per calcolare B^5 con B dell'esercizio precedente.

5) Consideriamo le rette in $\mathbb{R}^3$

$$r \colon \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad\qquad s \colon \begin{cases} y - z = -1 \\ x - 2y - z = 1. \end{cases}$$

Verificare che sono sghembe e calcolare la loro distanza e i punti di minima distanza. Determinare due piani paralleli che contengono le due rette.

6) Diagonalizzare sui complessi la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

NB: “diagonalizzare” significa trovare una matrice diagonale D simile alla matrice data, una base diagonalizzante e la matrice del cambiamento di base P rispetto alla base canonica in modo che $C = PDP^{-1}$.

7) Diagonalizzare la seguente matrice mediante una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$