Geometria
Simulazione esame - A. A. 2022-2023

3/1/2023

Il tema deve essere svolto in al massimo 3 ore, evitando interruzioni e mantenendo la massima concentrazione. Le risposte vanno brevemente giustificate. Il compito nella forma finale dovrà essere scritto in bella copia.

È necessario rispondere correttamente ad almeno 6 domande a risposta multipla. Ciascuna domanda a risposta multipla vale 0,5 punti (se la risposta è giusta). Gli esercizi valgono al massimo 26 punti (totale 30/30).

La correzione in questo caso non sarà individuale ma verrà fatta in classe giovedì 12 gennaio dalle 15:00.

Domande a risposta multipla

1) La dimensione di uno spazio vettoriale V è:

   $\boxed{\text{A}}$ Il numero di vettori di V.

   $\boxed{\text{B}}$ Il numero di vettori linearmente indipendenti di V.

   $\boxed{\text{C}}$ Il numero di vettori di una base per V.

   $\boxed{\text{D}}$ È un numero assegnato a priori, normalmente è dato.

2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $\boxed{\text{A}}$ 0 $\boxed{\text{B}}$ 9 $\boxed{\text{C}}$ -9 $\boxed{\text{D}}$ 1

3) Una matrice M si dice simmetrica se:

   $\boxed{\text{A}}$ $M = {}^tM$ $\boxed{\text{B}}$ $M = M^{-1}$ $\boxed{\text{C}}$ $M = -{}^tM$

4) Un sistema lineare $AX = B$ è compatibile se:

   $\boxed{\text{A}}$ Ammette almeno una soluzione.

   $\boxed{\text{B}}$ Ammette infinite soluzioni.

   $\boxed{\text{C}}$ Ammette esattamente una soluzione.

5) Un'applicazione lineare $f : V \to W$ tra spazi vettoriali è iniettiva se:

   $\boxed{\text{A}}$ $\operatorname{im} f = W$ $\boxed{\text{B}}$ $\ker f = V$ $\boxed{\text{C}}$ $\ker f = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $\ker f = \varnothing$.

6) I vettori $(1,2,-1)$ e $(1,0,1)$ di $\mathbb{R}^3$, col prodotto scalare canonico, sono ortogonali.

$\boxed{\text{A}}$ Vero $\boxed{\text{B}}$ Falso $\boxed{\text{C}}$ I dati forniti non sono sufficienti.

7) Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{A}}$ Vero $\boxed{\text{B}}$ Falso $\boxed{\text{C}}$ I dati forniti non sono sufficienti.

8) Un autovalore di una matrice simmetrica reale:

$\boxed{\text{A}}$ Ha parte immaginaria non nulla

$\boxed{\text{B}}$ Può essere qualunque numero complesso

$\boxed{\text{C}}$ È sempre reale

$\boxed{\text{D}}$ Non è detto che esista.

Esercizi

1) Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(a) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, rispetto al prodotto scalare canonico, che diagonalizza A. Trovare una matrice diagonale D, una matrice ortogonale S e la sua inversa, tali che $S^{-1}AS = D$.

(b) Sia b la forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ definita da $b(x,y) = {}^t x A y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$. Dimostrare che b è un prodotto scalare e scrivere la funzione norma associata.

(c) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, rispetto al prodotto scalare del punto precedente.

2) Si consideri il sistema dipendente dal parametro reale k

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ (k+2)x + 2y + 4z = 2 \\ (1+2k)x + 3y + 2z = 1 + 2k. \end{cases}$$

Determinare per quali k il sistema è compatibile, e per tali k descrivere l'insieme delle soluzioni, dicendo che tipo di insieme è, e la sua dimensione.

3) Calcolare la distanza del punto $(1,1,-2)$ dal piano di equazione $2x - z = -1$.