Svolgimento Provetta

Esercizio 1.

(A) Risolvere la disequazione

$$\frac{2x-8}{x^2+4x-5} < 0$$

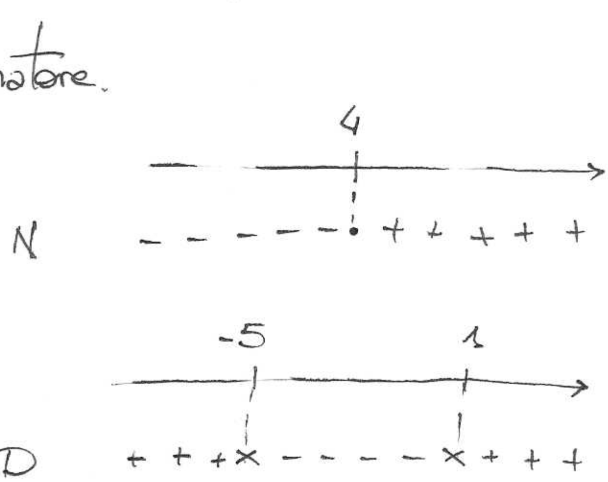
Per prima cosa, affinché l'espressione abbia senso, dobbiamo chiedere $x^2+4x-5 \neq 0$. Risolviamo quindi $x^2+4x-5=0$.

$\Delta = 16+20=36$ $\quad$ $\Delta > 0$ dunque due soluzioni

$x_1 = \frac{-4+6}{2} = 1$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-4-6}{2} = -5$

Chiediamo pertanto $x \neq 1$ e $x \neq -5$.

Per risolvere la disequazione, studiamo il segno di numeratore e denominatore.



Il segno della funzione razionale è dunque dato dalla regola dei segni combinando numeratore e denominatore

		-5		1		4	
N	$- \ -$		$- \ - \ - \ -$		$- \ - \ -$	$\bullet$	$+ \ + \ +$
D	$+ \ +$	$\times$	$- \ - \ - \ -$	$\times$	$+ \ + \ +$		$+ \ +$
	$-$		$+$		$-$		$+$

Ora osserviamo la richiesta, e dunque concludiamo che le soluzioni sono date da

$$\{ x \in \mathbb{R} : \ x < -5 \text{ oppure } 1 < x < 4 \} = (-\infty, -5) \cup (1, 4)$$

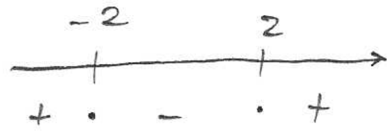
(B) Risolvere la disequazione

$$\sqrt{x^2 - 4} \leq 0$$

Innanzitutto, affinché l'espressione abbia senso, dobbiamo chiedere che il radicando $x^2 - 4$ sia non negativo. Pertanto, risolviamo preliminarmente $x^2 - 4 \geq 0$. Abbiamo

$$\Delta = 16 \qquad \Delta > 0$$

Le soluzioni dell'equazione associata $x^2 - 4$ sono dunque due, e sono -2 e 2; il segno dell'espressione $x^2 - 4$ sarà quindi dato da



Quindi l'espressione ha senso se $x \le -2$ oppure $x \ge 2$.

Risolviamo ora la disequazione $\sqrt{x^2-4} \le 0$. Notiamo che i valori della funzione radice quadrata sono sempre maggiori o uguali a zero, pertanto l'unica situazione in cui abbiamo valori minori o uguali a zero è quando tali valori sono uguali a zero. In altre parole:

$$\sqrt{x^2-4} \le 0 \iff \sqrt{x^2-4} = 0$$

Ora, per le proprietà della radice quadrata

$$\sqrt{x^2-4} = 0 \iff x^2-4 = 0$$

Quest'ultima equazione ha, come abbiamo visto, soluzioni -2 e 2, pertanto le soluzioni della disequazione sono $\{-2, 2\}$.

(c) Risolvere l'equazione

$$\frac{1}{3x-1} - \frac{1}{x+3} = 0$$

Innanzitutto, affinché l'espressione abbia senso, dobbiamo chiedere $3x-1 \neq 0$ e $x+3 \neq 0$, ovvero $x \neq 1/3$ e $x \neq -3$

Manipoliamo ora il membro sinistro dell'equazione:

$$\frac{1}{3x-1} - \frac{1}{x+3} = \frac{(x+3)-(3x-1)}{(3x-1)(x+3)}$$

$$= \frac{-2x+4}{(3x-1)(x+3)}$$

Ora, un'equazione del tipo $\frac{n}{d} = 0$ è equivalente, per i valori per cui ha senso, ovvero quando il denominatore non si annulla, a $n = 0$. Pertanto abbiamo che

$$\frac{-2x+4}{(3x-1)(x+3)} = 0 \iff -2x+4 = 0$$

$$\iff x = 2$$

Dato che $2 \neq 1/3$ e $2 \neq -3$, abbiamo che le soluzioni della equazioni sono $\{2\}$.

Esercizio 2.

(A) Risolvere la seguente equazione

$$\frac{\operatorname{sen}(x) - 1/2}{\cos(x)} = 0$$

Affinché l'espressione abbia senso dobbiamo chiedere che il denominatore non si annulli, ovvero che $\cos(x) \neq 0$. Per le proprietà del coseno abbiamo che

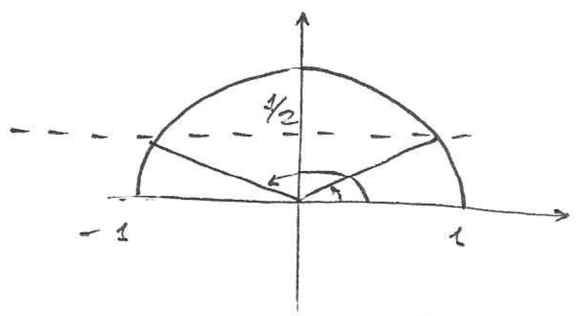
$$\cos(x) \neq 0 \iff \begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot(2\pi) \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z} \text{ e} \\ x \neq \frac{3\pi}{2} + k(2\pi) \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\iff x \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi \text{ per ogni } k \in \mathbb{Z}$$

A questo punto, risolviamo l'equazione. Ricordiamo che una funzione razionale si annulla se e solo se si annulla il numeratore:

$$\frac{\operatorname{sen}(x) - 1/2}{\cos(x)} = 0 \iff \operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$$

Osserviamo graficamente la situazione



Per le proprietà del seno otteniamo dunque che deve essere

$x = \frac{\pi}{6} + k\cdot(2\pi)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$ oppure $x = \frac{5\pi}{6} + k\cdot(2\pi)$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$

(B) Risolvere la disequazione

$$\cos^2(x) - \cos(x) - 2 > 0$$

Intravediamo una disequazione di secondo grado e pertanto cerchiamo di palesarlo attraverso la sostituzione $t = \cos(x)$:

$$t^2 - t - 2 > 0$$

Risolviamo questa disequazione:

$$\Delta = 1+8 = 9 \qquad \Delta > 0$$

pertanto l'equazione associata ha due soluzioni

$$t_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad e \quad t_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

Il segno dell'espressione $t^2 - t - 2$ è dunque

$$\begin{array}{ccccc} & -1 & & 2 & \\ + & \cdot & - & \cdot & + \end{array}$$

Quindi la disequazione ha come soluzione

$$\{t \in \mathbb{R} : t < -1 \text{ oppure } t > 2\}$$

Ora ricordiamo che abbiamo posto $t = \cos(x)$, e quindi andiamo a determinare gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$\cos(x) < -1$ oppure $\cos(x) > 2$

Dalle proprietà del coseno abbiamo che nessuna delle due condizioni può essere soddisfatta. Dunque la disequazione iniziale non ha soluzione.

(C) Risolvere la disequazione

$$\cos(x)\left(\operatorname{sen}(x) - 3/2\right) < 0$$

Per risolvere la disequazione determiniamo il segno di ciascuno dei fattori e poi utilizziamo la regola dei segni:

$$\cos(x) > 0 \iff -\frac{\pi}{2} + k(2\pi) < x < \frac{\pi}{2} + k\cdot(2\pi) \text{ per qualche } k\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{sen}(x) - \frac{3}{2} > 0 \iff \operatorname{sen}(x) > \frac{3}{2} \quad \text{e ciò non accade mai}$$

Riepilogando:

		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$	
$\cos(x)$	+	.	−	.	+	.	−	.	+
$\operatorname{sen}(x) - \frac{3}{2}$	−		−		−		−		−
	−		+		−		+		−

Pertanto le soluzioni della disequazione sono

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} + k(2\pi) < x < \frac{\pi}{2} + k \cdot (2\pi) \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Esercizio 3.

(A) Risolvere la disequazione

$$4^{x-2} > 2^{2x^2+1}$$

Riportiamo la disequazione nella forma di una disequazione tra esponenziali con la medesima base. Dato che $4 = 2^2$,

$$4^{x-2} = (2^2)^{x-2} = 2^{2x-4}$$

Pertanto la disequazione da risolvere è

$$2^{2x-4} > 2^{2x^2+1}$$

Dal momento che la funzione esponenziale con base maggiore di 1 è crescente, abbiamo che

$$2^{2x-4} > 2^{2x^2+1} \iff 2x-4 > 2x^2+1$$

$$\iff 2x^2 - 2x + 5 < 0$$

Risolviamo quindi l'equazione di secondo grado:

$$\Delta = 4 - 40 = -36 \qquad \Delta < 0$$

Dal momento che $\Delta < 0$, il segno di $2x^2 - 2x + 5$ e' il medesimo del coefficiente di x^2, ovvero 2; quindi $2x^2 - 2x - 5$ assume sempre segno positivo. Pertanto la disequazione non ha soluzioni.

(B) Risolvere l'equazione

$$\log_3 (x+1) + \log_3 (x-1) = 1$$

Innanzitutto, affinché l'espressione abbia senso, gli argomenti di entrambi i logaritmi devono essere positivi, dunque dobbiamo chiedere:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \iff x > 1$$

Ora manipoliamo il membro sinistro dell'equazione utilizzando le proprietà dei logaritmi:

$$\log_3 (x+1) + \log_3 (x-1) = \log_3 \big((x+1)(x-1)\big) = \log_3 (x^2 - 1)$$

Andiamo quindi a risolvere

$$\log_3 (x^2-1) = 1$$

Per le proprietà dei logaritmi

$$\log_3 (x^2-1) = 1 \iff x^2-1=3 \iff x^2-4=0$$

Le soluzioni di quest'ultima equazione sono $\{-2, 2\}$. Ricordando le condizioni che abbiamo imposto all'inizio, otteniamo che l'unica soluzione è $\{2\}$.

(C) Risolvere la disequazione

$$7^{3x+1} \cdot \log_2 (x-7) < 0$$

Innanzitutto, affinché l'espressione abbia senso, dobbiamo imporre che l'argomento del logaritmo sia positivo:

$$x-7>0 \iff x>7$$

A questo punto, risolviamo la disequazione. Notiamo che

$$7^{3x+1} > 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Pertanto

$$7^{3x+1} \cdot \log_2(x-7) < 0 \iff \log_2(x-7) < 0$$

Ora, per le proprietà dei logaritmi

$$\log_2(x-7) < 0 \iff 0 < x-7 < 1 \iff 7 < x < 8$$

Pertanto le soluzioni della disequazione sono

$$\{x \in \mathbb{R} : \quad 7 < x < 8\} = (7, 8)$$

Esercizio 4.

(A) Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(x).$$

Per valutare se la funzione sia pari o dispari, dobbiamo innanzitutto controllare che per ogni elemento x del dominio della funzione anche il suo opposto $-x$ appartenga al dominio della funzione. Ciò è vero nel nostro caso, dal momento che il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$.

Ora proseguiamo nell'analisi della parità e disparità:

- f è pari se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

vale che $f(-x) = (-x) \cdot \operatorname{sen}(-x) = (-x) \cdot (-\operatorname{sen}(x))$

$= x \cdot \operatorname{sen}(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

pertanto la funzione è pari

- f è dispari se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

vale però che $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$-f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

quindi $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, pertanto f non è dispari

(B) Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Dato che il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$, vale che

per ogni $x \in \operatorname{dom}(f)$ vale che $-x \in \operatorname{dom}(f)$

e quindi la prima condizione per la parità/disparità è soddisfatta.

Ora proseguiamo nell'analisi della parità e disparità:

- f è pari se $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

  quando $x = 0$, allora $-x = 0$, e quindi $f(0) = -1 = f(-0)$

  quando $x \neq 0$, allora $-x \neq 0$, e quindi $f(x) = 3 = f(-x)$

  pertanto per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale che $f(x) = f(-x)$, dunque f è pari

- f è dispari se $f(x) = -f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

  vale però che $f(1) = 3$, mentre $-f(-1) = -3$, quindi $f(1) \neq -f(-1)$, pertanto f non è dispari.

Esercizio 5.

(A) Consideriamo la funzione

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

La funzione f è limitata inferiormente se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale per cui $f(x) \geq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Ora, se $x \leq 0$ vale che $f(x) \geq 0$ per le proprietà della funzione potenza al quadrato; se $x > 0$ vale che $f(x) \geq -1$ per le proprietà del seno. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $f(x) \geq -1$ e dunque f è limitata inferiormente.

La funzione f non è limitata superiormente dal momento che, in qualsiasi modo fissiamo $M \in \mathbb{R}_{>0}$, vale che $f(-M) = (-M)^2 = M^2$ e dunque $f(-M) > M$ (ovvero, fissato un qualsiasi "candidato" limite superiore, troviamo sempre un valore della funzione più grande di esso).

(B) Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < -1 \\ -x & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Notiamo che, quando $x \in [-1, 1]$, vale che

$$-1 \leq f(x) \leq 1$$

Pertanto, vale che:

se $x < -1$, allora $f(x) \geq -1$

se $-1 \leq x \leq 1$, allora $f(x) \geq -1$

se $x > 1$, allora $f(x) \geq -1$

Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale che $f(x) \geq -1$, dunque f è limitata inferiormente. Analogamente

se $x < -1$, allora $f(x) \leq 1$

se $-1 \leq x \leq 1$, allora $f(x) \leq 1$

se $x > 1$, allora $f(x) \leq 1$

Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale che $f(x) \leq 1$, dunque f è limitata superiormente.