Corso di ALEG - Simulazione Prova scritta

5 gennaio 2023

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di sistema lineare e di una sua soluzione.

Si enunci e si dimostri il Teorema di Rouché - Capelli.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) **(3 punti)** Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) **(5 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ e delle loro basi.

(c) **(3 punti)** Si dica se il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è compatibile e, in caso affermativo, si trovi la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

- **(4 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

- **(5 punti)** Si trovi una base $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

(4) • **(4 punti)** Si determini un'equazione cartesiana della retta piana $L \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ parallela alla retta M di equazioni

$$M: \begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1-t \end{cases}$$

e passante per il punto $Q = (1, 2)$.

• **(3 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino il piano H e la retta s:

$$H: \; x - y + z = 7 \qquad s: \begin{cases} x &= 7 \\ y &= 3t \\ z &= 1 - 6t \end{cases}$$

Si dica se H ed s sono incidenti o paralleli.
Inoltri, si determinino delle equazioni parametriche di una retta r incidente s e contenuta in H:

$$r \cap s \neq \emptyset, \quad r \subset H.$$